PROGRAMME DE RECHERCHE COMPLET

LOUIS MERLIN

Contents

1. Introduction

[1]

Le domaine de recherche présenté dans ce texte mélange géométrie riemannienne, géométrie métrique et théorie des groupes de Lie. Dans ce vaste contexte, les variétés différentielles sont les objets principaux, en tant que lieux privilégiés pour faire de la géométrie. Le concept (toujours réalisable) de métrique riemannienne permet à l'espace topologique sous-jacent à une variété d'être enrichi par la présence d'objets de nature métrique. Il permet en effet de disposer des notions de distance, d'angles, d'une mesure de volume puis des notions plus sophistiquées de géodésiques (droite de plus court chemin localement) ou de courbure par exemple. L'étude de ces variétés riemanniennes a révélé une théorie très importante, très dynamique de nos jours, riche d'interconnexions avec les autres branches des mathématiques.

Un cas particulier très important de cette théorie est celui des espaces symétriques. Les géométries symétriques sont celles qui possèdent un très gros groupe d'isométries. C'est le cas des familles d'exemples les plus répandues (géométrie sphérique, euclidienne ou hyperbolique) mais aussi d'autres espaces homogènes (l'espace des formes quadratiques définies positives de déterminant 1, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, par

[1] N.B : Cette introduction est rédigé dans un style informel. Les définitions précises se trouvent à la section 2

exemple). Un fait remarquable dans cette situation est que l'étude géométrique d'un espace symétrique (simplement connexe) peut être menée de façon purement algébrique. C'est ainsi qu'apparaît la structure d'algèbre de Lie qui sert dans cette situation à décoder les phénomènes géométriques. Un théorème d'uniformisation permet de ramener l'étude des variétés métriques complètes localement modelées sur un espace symétrique à celui des sous-groupes discrets d'un groupe de Lie. La correspondance consiste à passer de la variété au groupe en prenant le groupe fondamental et du groupe à la variété en considérant le quotient du revêtement universel (qui est un espace symétrique) par le groupe, qui agit par isométries. La taille du groupe d'isométries (et donc la possibilité de créer beaucoup de sous-groupes discrets) explique pourquoi ces géométries symétriques sont très répandues. Dans l'espoir de montrer qu'une situation symétrique est en fait une situation générique, la géométrie riemannienne fournit aussi des outils dits de "comparaison".

L'attention portée ici aux espaces symétriques implique que les méthodes diffèrent des méthodes riemanniennes habituelles. La géométrie riemannienne se propose en effet de développer des outils de nature différentielle, par l'intermédiaire de champs de tenseurs sur la variété. Les résultats de la théorie consiste alors à interpréter géométriquement (ou au moins topologiquement) le comportement de ces tenseurs. Cependant, lorsque le groupe des isométries est suffisamment gros, on peut espérer raisonner différemment, et faire par exemple fonctionner le principe selon lequel

Quitte à faire agir le groupe, on peut supposer que ...

...la situation est explicite et plus simple. Le premier objectif de ce projet est d'amener à une meilleur compréhension des invariants géométriques globaux définis sur un espace symétrique, ou plus généralement sur une structure différentielle qui supporte une métrique symétrique et cela constitue mon activité de recherche principale. Parmi les invariants globaux considérés, l'entropie volumique, le volume, le volume minimal, la systole et la cohomologie sont les plus importants (2.1.2).

Plus récemment, la géométrie riemannienne a aussi trouvé une porte d'entrée dans l'étude des espaces métriques (qui ne sont pas nécessairement des variétés), notamment par l'intermédiaire d'une définition purement métrique de la courbure négative. C'est pourquoi on trouvera aussi dans ce texte des projets consacrés à la géométrie des immeubles ou aux géométries de Hilbert. Les immeubles sont aux espaces symétriques ce que les arbres sont à l'espace hyperbolique : des espaces singuliers mais dont les propriétés géométriques à grande échelle possède des points communs avec la géométrie symétrique (et avec un groupe d'isométries omniprésent : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit naturellement sur le plan hyperbolique; $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit naturellement sur un arbre). Les géométries de Hilbert constituent une autre grande famille de géométries qui généralisent la géométrie hyperbolique : ce sont des déformations projectives de la géométrie hyperbolique.

Plutôt que de prétendre dresser une liste de toutes les questions ouvertes que l'on peut formuler avec ces ingrédients, ce texte ne contient qu'une sélection qui correspond plus à mes goûts et à mes compétences. Ainsi, un paragraphe est consacré aux questions de rigidité/flexibilité. Un des grands objectifs de ma carrière est en effet de comprendre ce qui est rigide (et pourquoi) et ce qui est flexible (et jusqu'à quel point).

Ces trois aspects de mon activité de recherche (invariants globaux des espaces localement symétriques, géométrie métrique et les questions de rigidité/flexibilité - les thématiques pouvant d'ailleurs s'entremêler) sont détaillés à la section 3, avec des propositions de questions concrètes sur lesquelles se pencher. Ces questions sont classées selon deux niveaux de difficulté qui correspondent à des projets à court-terme ou à des sujets plus ambitieux. Auparavant, à la section 2, on donne les prérequis mathématiques nécessaires, un état de l'art actuel (en insistant sur mes propres contributions) et on discute des enjeux de ce projet de recherche. Deux niveaux de lecture sont proposés : le lecteur avec une culture mathématiques qui n'est pas dirigée vers la géométrie est encouragé à sauter les parties du texte écrites en petit.

2. Résumé des travaux

2.1. **Quelques prérequis.**

2.1.1. *Géométrie des espaces symétriques.* Le lecteur est supposé familier avec les bases de la géométrie différentielle, y compris l'aspect riemannien (voir par exemple [Lee97]). En revanche, le contexte symétrique est plus spécifique, bien que fréquent.

Définition 1 (Espace symétrique de type non-compact)**.** *un espace symétrique de type non-compact est une variété riemannienne $(\tilde{M}, g)$ simplement connexe, de courbure négative ou nulle, sans facteur de de Rham isométrique à $\mathbb{R}$ (cela signifie que l'on ne peut pas écrire la variété comme un produit riemannien avec un facteur $\mathbb{R}$) et telle qu'en chaque point $p \in \tilde{M}$, il existe une isométrie σ_p telle que $d_p\sigma_p = -id$.*

Cette définition signifie que la variété riemannienne $(\tilde{M}, g)$ a beaucoup d'isométries. En fait, on peut même montrer facilement que le groupe d'isométrie est si gros qu'il est transitif sur la variété puis que le stabilisateur d'un point est un sous-groupe compact strict et maximal du groupe d'isométries. Inversement, si $\tilde{M}$ s'écrit G/K comme ci-dessus, alors G préserve une métrique riemannienne sur $\tilde{M}$ (le groupe K étant compact, il préserve une métrique sur $T_{[e]}\tilde{M}$, que l'on peut ensuite promener par l'action de G). Le groupe G est semi-simple si et seulement si la courbure de $\tilde{M}$ est négative ou nulle et $\tilde{M}$ n'a pas de facteur $\mathbb{R}$. Ainsi de la définition géométrique, on déduit une caractérisation algébrique : $(\tilde{M}, g)$ est un espace symétrique de type non-compact si et seulement si $\tilde{M} = G/K$ et g est une métrique G-invariante à gauche; où G est un groupe de Lie semi-simple et K est un sous-groupe compact maximal. On peut alors décrire indifféremment un espace symétrique par son espace homogène $\tilde{M}$ ou son groupe semi-simple G.

Une solide référence est le livre de P. Eberlein [Ebe96].

Mentionnons encore quelques aspects de la géométrie des espaces symétriques. La définition ci-dessus autorise la présence de zones plates (de courbure nulle) dans la variété et il existe un moyen de quantifier l'importance de ces zones plates. On montre en effet que les espaces euclidiens maximaux plongés de manière isométriques dans $\tilde{M}$ ont tous la même dimension (le groupe est transitif sur ces plats). Cette dimension des plats maximaux s'appelle le *rang* de l'espace symétrique.

Mais la dimension n'est pas le seul point commun à ces plats maximaux. Chacun d'entre eux est en effet canoniquement muni du même *système de racines* comme à la figure 1 qui se représente géométriquement par un pavage des plats maximaux par des cônes délimités par des hyperplans vectoriels. Nous reviendrons sur ce type de structure combinatoire au paragraphe 2.1.4. Cette structure caractérise l'espace symétrique, lorsque le rang est supérieur à 2, [BGS85].

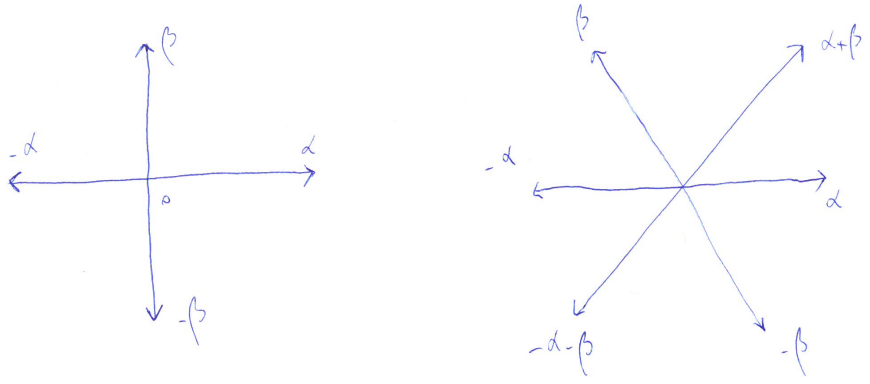


FIGURE 1. Systèmes de racines de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ (à gauche) et de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (à droite)

Un espace localement symétrique M est une variété riemannienne localement isométrique à un espace symétrique. Si la variété est complète, on montre qu'elle s'obtient par le quotient de $\tilde{M}$ par un sous-groupe discret Γ de G. Si M est compacte, on dit que le groupe Γ est cocompact; si M est de volume fini, on dit que Γ est un réseau.

Pour ce qui est des notations, on désigne dans ce texte un espace symétrique par $\tilde{M}$, une variété riemannienne simplement connexe quelconque par $\tilde{X}$, une variété localement symétrique par M et une variété riemannienne par X.

La discussion qui suit est plus précise mais plus technique. Elle vise à définir le bord à l'infini d'un espace symétrique et d'en présenter la structure. Fixons une fois pour toutes un point $p \in \tilde{M}$. Ce point et son involution σ_p associée détermine une décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{t}$$

de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ s'identifie à l'algèbre de Lie de $K = \mathrm{Stab}_G(p)$ et $\mathfrak{p}$ s'identifie à $T_p\tilde{M}$. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie abélienne et maximale de $\mathfrak{p}$. Le rang de $\tilde{M}$ est la dimension de $\mathfrak{a}$. Si $A = \exp(\mathfrak{a})$, alors $A \cdot p$ est un plat maximal (en effet, la courbure se calcule avec des crochets de Lie dans l'algèbre de Lie).

Un vecteur $v \in T\tilde{M}$ est dit régulier s'il est tangent à un unique plat. Sinon il est dit singulier. Une géodésique est elle-aussi dite régulière ou singulière si l'un (donc tous) de ses vecteurs tangents est régulier ou singulier. Un point du bord de l'espace symétrique $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ (pour le bord d'une variété à courbure négative ou nulle, voir la discussion qui précède le théorème 2; le bord est aussi l'ensemble des classes d'équivalences de géodésiques pour la relation d'"être à distance finie") hérite lui aussi de la notion de régularité puisque c'est la limite d'une géodésique. Les vecteurs singuliers de $\mathfrak{a}$ se répartissent sur des hyperplans vectoriels (qui correspondent aussi aux hyperplans d'un système de racines). Une chambre de Weyl (ouverte) $\mathfrak{a}^+$ de $\mathfrak{a}$ est le choix d'une composante connexe de vecteurs réguliers de $\mathfrak{a}$ (qui correspond à un choix de racines positives). De même, dans l'espace symétrique, $A^+ \cdot p = \exp(\mathfrak{a}^+) \cdot p$ est une chambre de Weyl.

Une autre notion de bord de l'espace symétrique, plus adaptée au rang supérieur, est le bord de Furstenberg de $\tilde{M}$. Soit $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ un point régulier. le bord de Furstenberg s'identifie à l'orbite $G\xi$ de ξ sous l'action de G. C'est aussi l'espace des chambres de Weyl à l'infini de $\tilde{M}$ (i.e la trace dans $\partial_\infty \tilde{M}$ des chambres de Weyl de $\tilde{M}$) puisque le groupe G agit transitivement sur ces chambres de Weyl mais ne connecte jamais deux points de la même chambre. On note $P = \mathrm{Stab}_G(\xi)$ de sorte que le bord de Furstenberg s'identifie à G/P et on dit que P est un sous-groupe parabolique minimal (il est minimal car ξ est régulier). Les points singuliers ont naturellement un "type" selon leur position dans le chambre de Weyl fermée; leur orbite donne d'autres notions de bord de $\tilde{M}$ qui s'identifie à des espaces homogènes G/P_Θ où Θ est le type de point singulier. Le bord de Furstenberg se note $\partial_F \tilde{M}$.

2.1.2. *Quelques invariants géométriques et topologiques.* Les invariants géométriques, différentiables et topologiques globaux définis dans cette section sont l'entropie volumique et topologique, l'exposant critique d'un groupe discret, la systole, le volume minimal et la cohomologie (bornée). Le programme de recherche consacré à ces invariants peut se résumer de la manière suivante : quelles sont les informations géométriques contenus dans ces invariants ? Gardant cet état d'esprit, on exclut le spectre des variétés riemanniennes dont l'étude est essentiellement analytique et dont on sait qu'il n'a que peu de contrôle sur la géométrie [Bus92, chapitre 12].

Soit (X, g) une variété compacte de revêtement universel riemannien $(\tilde{X}, g)$. On fixe un point $x \in \tilde{M}$. On montre que la quantité suivante existe et qu'elle est indépendante de x :

$$h(g) = \lim_{R \to \infty} \frac{\log \mathrm{Vol}\, B(x, R)}{R}.$$

On appelle $h(g)$ l'entropie volumique de la métrique g.

L'entropie est donc une quantité qui mesure le taux de croissance exponentielle du volume des boules riemanniennes. Elle ne dépend que de la géométrie du revêtement universel (pourvu qu'il admette un quotient compact). Noter que dans l'espace euclidien, le volume des boules a une croissance polynomiale avec le rayon de sorte que l'entropie est nulle. En revanche dans l'espace hyperbolique, on trouve facilement $h(\mathbb{H}^n) = n - 1$. En courbure strictement négative, l'entropie est toujours strictement positive (par comparaison à l'entropie algébrique du groupe [Mil68]). L'entropie algébrique du groupe muni d'un système fini de générateurs est l'entropie métrique d'un graphe de Cayley, on montre ensuite que le revêtement universel d'une variété compacte est quasi-isométrique au graphe de Cayley. L'annulation ou la positivité de l'entropie est préservée par quasi-isométries. Ainsi donc, on constate que le contexte riemannien n'est pas le plus général avec lequel travailler. En effet, dans tout espace métrique mesuré, on peut calculer des volumes de boules (2.1.3). Il n'y a en revanche aucune garantie que la limite existe et c'est en général un enjeu important de comprendre quels sont les espaces métriques mesurés qui admettent une entropie volumique (voir à ce propos la question 11 bis du programme de recherche).

Un exemple : L'entropie des espaces symétriques se calcule facilement avec les données introduites au paragraphe 2.1.1. Soit en effet, b le "barycentre" de la chambre de Weyl, c'est-à-dire la somme des vecteurs duaux aux racines positives qui déterminent $\mathfrak{a}^+$. Alors, on peut montrer ([Alb99]) que $h(\tilde{M}) = \|b\|$. Pour cela, il s'agit de voir que, pour tout réseau Γ de G, la direction de croissance maximale de Γ est b puis d'appliquer le théorème 2.

La terminologie entropie suggère aussi une interprétation dynamique ou comme la mesure d'une certaine indétermination. Ces notions-là d'entropies existent et ont bien des similitudes avec la notre [KH97]. Nous

n'utiliserons pas la version probabiliste dans ce texte mais la version dynamique apparaîtra au paragraphe 3.3.4.

La notion suivante vise à définir une mesure du chaos de la dynamique du flot géodésique. Soit donc (X, g) une variété riemannienne compacte pour laquelle on considère son flot géodésique Φ^t. Par définition Φ^t est l'application du tangent unitaire T^1X de X dans lui-même qui, à un vecteur v associe $\gamma_v'(t)$ où γ_v est la géodésique de vecteur initial v.

On considère la distance d_T sur T^1X définie par

$$d_T(u, v) = \sup_{t \leqslant T} d(\pi_X(\Phi^t(u)), \pi_X(\Phi^t(v))).$$

Ici d est la distance riemannienne sur X et π_X la projection canonique de T^1X sur X. Ainsi, les boules $B(u, \varepsilon)$ pour la distance d_T sont constituées des vecteurs v dont l'orbite reste à distance inférieure à ε de celle de u jusqu'au temps T.

Dans cette situation on dit qu'un sous-ensemble S de T^1X est (ε, T)-séparant si, pour tout $u, v \in S$, $d_T(u, v) \geqslant \varepsilon$ et on note $\mathrm{Sep}(\varepsilon, T)$ la taille d'un ensemble (ε, T)-séparant maximal. Ce nombre mesure le nombre d'orbites qui peuvent être reconnues jusqu'au temps T avec une précision ε. Enfin, on définit l'entropie topologique du flot géodésique par

$$h_{\mathrm{top}}(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{T \to \infty} \frac{\log \mathrm{Sep}(\varepsilon, T)}{T}.$$

L'exposant critique est une variante de l'entropie volumique et dont les points communs permettent parfois de lui faire jouer un rôle analogue (voir à ce sujet la question 8 du programme de recherche). C'est un nombre réel associé à un sous-groupe discret d'isométries d'une variété riemannienne simplement connexe. Bien que sa définition puisse avoir du sens dans le contexte général suivant, son utilisation n'est pertinente qu'en courbure sectionnelle K pincée, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes a et b positives telles que

$$-a \leqslant K \leqslant -b.$$

[Pei13] ou pour des groupes de covolume fini (voir la question 8 de la section 3) On forme dans un premier temps la série de Poincaré

$$P(s, x, \Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x)}.$$

En tant que série de Dirichlet, cet objet a un *exposant critique* indépendant de x, donné par

$$\eta(\Gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log \# \{\gamma \in \Gamma \mid \ d(x, \gamma x) \leqslant n\}}{n}.$$

Soit maintenant $\tilde{X}$ une variété riemannienne simplement connexe de courbure sectionnelle K négative ou nulle Un phénomène de courbure négative assure que $\tilde{X}$ est différentiable à $\mathbb{R}^n$, via l'exponentielle riemannienne en un point arbitraire. On peut donc canoniquement compactifier $\tilde{X}$ par l'ajout d'une sphère à l'infini que l'on appelle le bord de $\tilde{X}$ et que l'on note $\partial_\infty \tilde{X}$. Puisque le groupe Γ est discret, ses orbites $\Gamma \cdot x$ pour $x \in \tilde{X}$ ne peuvent s'accumuler qu'au bord $\partial_\infty \tilde{X}$. On note $\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot x} \backslash \Gamma \cdot x$ les points d'accumulations d'une orbite. Le bord $\partial_\infty \tilde{X}$ étant canoniquement muni d'une métrique, on peut calculer la dimension de Hausdorff de $\Lambda(\Gamma)$. C'est un invariant que l'on note $\delta(\Gamma)$.

Théorème 2 (Comparaisons)**.**

(1) Pour une variété compacte X, on a toujours $h \leqslant h_{\mathrm{top}}$ avec égalité si (mais pas seulement si) X a une courbure partout négative.

(2) Pour toute variété riemannienne (X, g) et tout groupe discret Γ, on a toujours $h(g) \leqslant \eta(\Gamma)$. Il y a égalité si Γ est cocompact.

(3) En courbure négative pincée, et pour des groupes convexe-cocompacts [2],

$$\eta(\Gamma) = \delta(\Gamma).$$

(4) En courbure négative ou nulle, si le groupe Γ est cocompact, alors $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}^{n-1}$.

[2]Une façon de dire que la variété a la topologie d'une variété compacte mais sans être nécessairement compacte, voir plus bas le paragraphe 2.2.4

La deuxième et la dernière assertions sont élémentaires, la première est un résultat de [Man79], la seconde est un théorème de [Yue96]

Que l'on retire la condition de courbure négative, même dans le cas des espaces symétriques, et la situation se complique énormément. Par exemple, bien que l'on puisse définir un exposant critique pour un groupe discret d'isométries d'un espace symétrique de rang supérieur, il est préférable de modifier la construction pour tenir compte de la nature du point base [Qui02] : le groupe d'isométrie n'étant pas transitif sur les couples de points à même distance, la distance $d(x, \gamma x)$ n'est pas la seule information portée par le couple $(x, \gamma x)$. Le groupe n'étant pas non plus transitif sur le bord, l'ensemble limite est une réunion d'orbites, chacune ayant un rôle à jouer (voir l'article récent [GMT19]).

L'exposant critique d'un groupe discret est le premier ingrédient de la théorie de Patterson-Sullivan. Dans différents contextes, par exemple pour des groupes discrets d'isométries d'un espace symétrique ([Qui02] et [Alb99]) ou pour des variétés à courbure négative ([Rob03], voir aussi [Qui]), on construit une famille de mesures $(\nu_x)_{x\in\tilde{X}}$, chacune supportée sur $\Lambda(\Gamma)$ et vérifiant les deux conditions suivantes.

(1) La famille de mesures est Γ-équivariantes, c'est-à-dire solution de l'équation, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\gamma_* \nu_x = \nu_{\gamma x}$$

(2) Les mesures (ν_x) sont toutes à densité les unes par rapport aux autres avec

$$\frac{\partial \nu_x}{\partial \nu_y}(\theta) = e^{-\eta(\Gamma) b(\theta, x, y)}$$

où $b : \partial_\infty \tilde{X} \times \tilde{X} \times \tilde{X}$ est la fonction de Busemann définie par

$$b(\theta, x, y) = \lim_{t\to\infty} d_{\tilde{X}}(y, \gamma_\theta(t)) - t$$

si γ_θ est l'unique géodésique telle que $\gamma_\theta(0) = x$ et $\gamma_\theta(\infty) = \theta$.

Il y a unicité d'une telle famille de mesures si Γ n'est pas élémentaire. On dit que ce sont les mesures de Patterson-Sullivan de Γ. Dans bien des cas, ces mesures permettent d'étudier les propriétés ergodiques du flot géodésique sur $\Gamma\backslash\tilde{X}$, [Rob03]. Mais, dans l'esprit de ce texte, elles constituent un plongement équivariant de $\tilde{X}$ dans l'espace des mesures sur $\Lambda(\Gamma)$ et la géométrie de $\Gamma\backslash\tilde{X}$ s'étudie par l'intermédiaire de techniques de géométrie extrinsèque vis-à-vis de ce plongement (voir page 9)

Sur une variété riemannienne (M, g), la *systole* est par définition la longueur d'une des plus petites courbes non contractiles, comme illustré sur la figure 2.

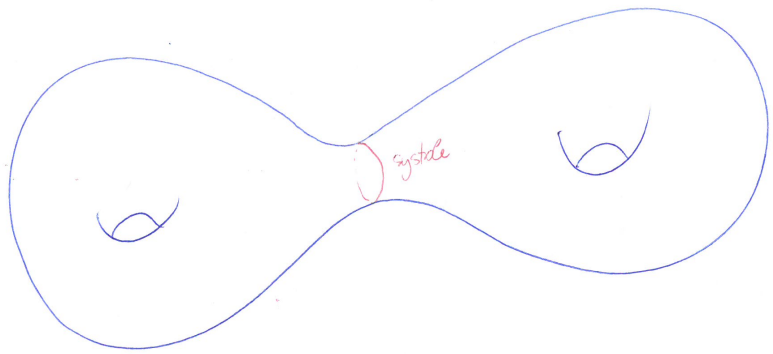


FIGURE 2. La systole d'une surface de genre 2

On la note sys. Par extension, on désigne aussi parfois par la systole, la ou les courbe(s) qui réalise(nt) cette longueur minimale. Un résultat profond dont l'esprit est d'établir une inégalité "isopérimétrique" de M. Gromov ([Gro83]) prétend que la systole est majorée par le volume : pour une variété fermée essentielle [3] M, il existe une constante c_n qui ne dépend que de la dimension n de la variété telle que, pour toute métrique g sur M,

$$\mathrm{sys}^n(g) \leqslant c_n \,\mathrm{Vol}(g)$$

[3]Une condition topologique très faible; c'est par exemple le cas des variétés asphériques, par exemple celles qui portent une métrique de courbure négative ou nulle

Si la systole est grande en effet, pour que la variété (compacte) se referme autour, cela nécessite un gros volume. Dans un contexte géométrique suffisamment vague, on ne peut pas en général donner des estimées plus précises sur le comportement de la systole. Une direction de recherche actuelle consiste à tenter d'affiner la constante c_n lorsque l'on fait des hypothèses topologiques additionnelles sur la variété. L'invariant topologique (ce n'est pas évident, a priori, ce n'est qu'un invariant de la structure différentiable, voir [Bab92]) associé est en fait le *volume systolique* $\sigma(M)$:

$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{\mathrm{sys}(g)^n}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des métriques riemanniennes sur M. Puisque la quantité à minimiser est homogène, on peut, de manière équivalente, considérer la plus grande systole parmi les métriques de volume 1 sur M.

Un dernier invariant, introduit dans [Gro82] est cette fois-ci de nature différentiable ([Bes00]). Soit donc X une variété différentiable. On appelle en effet *Volume minimal* la quantité

$$\mathrm{MinVol}(M) = \inf\left\{\mathrm{Vol}(M,g) \mid g \text{ est une métrique sur } M \text{ satisfaisant } |K(g)| \leqslant 1\right\}$$

Dans son article fondateur [Gro82], l'auteur relie volume et cohomologie bornée d'une variété riemannienne compacte X. Un panorama complet de la théorie dépasse le cadre de ce texte et on renvoie au livre [Mon01] pour découvrir le sujet.

Rappelons seulement que la cohomologie bornée est la cohomologie du complexe des fonctions bornées $\Gamma = \pi_1(M)$-invariantes sur $\tilde{M}$,

$$\mathcal{C}_b(\tilde{M}^{n+1}, \mathbb{R})^\Gamma,$$

avec une différentielle "combinatoire" donnée par

$$\partial f(x_0, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(x_0, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_{n+1}).$$

Elle est en général plus riche que la cohomologie ordinaire car il arrive souvent que ∂f soit bornée sans que f le soit, fournissant ainsi une classe de cohomologie non nulle en cohomologie bornée mais triviale en cohomologie ordinaire, [BG92]. Par exemple, si S est une surface de caractéristique d'Euler négative, $H_b^2(S)$ n'est pas de dimension finie, [Fri17] (car $\pi_1(S)$ admet beaucoup de quasi-morphismes). La philosophe générale prétend donc que les groupes de cohomologie bornée contiennent plus d'informations topologique sur X que la cohomologie ordinaire. C'est en tout cas un enjeu important de comprendre ces groupes (peu de choses sont connues à leur propos)

2.1.3. *Géométrie de Hilbert.* Le modèle de Klein fait apparaître la géométrie hyperbolique comme un ellipsoïde de l'espace projectif, métrisé par la formule

$$d(p,q) = \frac{1}{2}\log\left([a:p:q:b]\right),$$

où $[a:p:q:b]$ désigne le birapport des quatre points.

Déformons maintenant l'ellipsoïde en un convexe quelconque Ω de l'espace projectif. La même formule définit alors une distance à l'intérieur du convexe. On dit alors que l'on a déformé la structure projective sous-jacente à la géométrie hyperbolique. L'espace métrique obtenu (Ω, d_Ω) s'appelle une géométrie de Hilbert (figure 3).

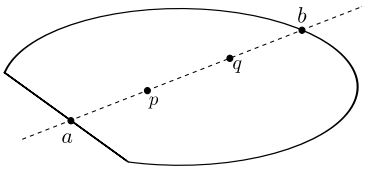


FIGURE 3. Une géométrie de Hilbert

En se référant à [PT14] pour une approche détaillée, voici quelques propriétés utiles des géométries de Hilbert

(1) Les espaces (Ω, d_Ω) sont des espaces métriques complets (le bord du convexe est "à l'infini").

(2) La métrique d_Ω n'est riemannienne que dans le cas où Ω est un ellipsoïde. En revanche, d_Ω est toujours finslérienne, engendré par la famille de normes

$$\|v\|_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right),$$

où t_1 et t_2 sont les deux réels positifs tels que $p + t_i v \in \partial\Omega$.

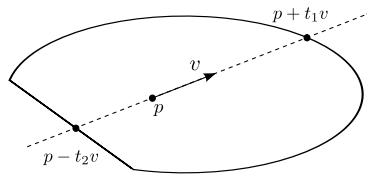


FIGURE 4. La structure finslérienne

(3) Les droites euclidiennes sont des géodésiques de (Ω, d_Ω) et ce sont mêmes les seules si Ω est strictement convexe.
(4) Les transformations projectives qui laissent Ω invariant sont des isométries de d_Ω.

Pour définir une entropie des géométrie de Hilbert, il faudrait disposer d'une mesure de volume. Or il n'existe pas de choix canonique d'une telle mesure (comme dans le cas riemannien) mais une famille de mesures possibles, voir [ÁPT04]. Cependant, ces choix de volumes sont sans influence sur l'entropie, celle-ci n'ayant pour vocation qu'à capturer des phénomènes géométriques de grande échelle. Un choix possible est la mesure de Busemann : on considère la fonction σ sur Ω donnée par

$$\sigma(x) = \frac{\omega_n}{\mathcal{L}(B_x)}$$

où ω_n est le volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}$ est la mesure de Lebesgue et B_x est la boule unité Finslérienne centrée en x. Enfin la mesure de Busemann μ est une mesure dans la classe de la mesure de Lebesgue dont la densité est σ, i.e:

$$\mu(A) = \int_A \sigma(x) d\mathcal{L}(x)$$

pour tout borélien A.

La quantité $\frac{\log \mathrm{Vol}\, B(x,R)}{R}$ ne converge cependant pas toujours (voir question 11 bis). On note les limites inférieures et supérieures par $\underline{h}$ et $\overline{h}$ respectivement. La notation h seule signifie implicitement que la limite existe.

2.1.4. *Géométrie des immeubles.* La référence principale pour appréhender la structure d'immeuble est [AB08] mais le point de vue employé ici suit l'approche géométrique de [KL97]. Commençons par une discussion heuristique. La terminologie très imagée fournit une bonne intuition : un immeuble est une réunion d'appartements, chaque appartement est lui-même découpé en chambres qui sont séparées par des murs. Un appartement est par définition un espace euclidien muni d'un pavage. Noter l'analogie avec les plats des espaces symétriques (analogie renforcée par la terminologie anglaise). Les chambres sont les composantes connexes de ce pavage, les murs sont les hyperplans (affines dans ce cas) de pavage. Puis la structure globale est obtenue en "branchant" ces appartements le long des murs (chaque mur étant donc commun à plusieurs appartements). Lorsque l'espace euclidien est de dimension 1, un immeuble est un arbre.

Plus précisément, soit G un groupe fini engendré par des réflexions vectorielles de $\mathbb{R}^n$, H un sous-groupe du groupe des translations de $\mathbb{R}^n$ qui engendre $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$, puis $W = G \ltimes H$ le groupe affine dont la partie vectorielle est G et la partie de translation est H. Les hyperplans affines de réflexions de W sont les murs évoqués plus haut. Un espace métrique X est un immeuble affine s'il existe un atlas de plongements isométriques $\varphi : \mathbb{R}^n \to X$ tel que

(1) Chaque changement de cartes $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est la restriction d'un élément de W.
(2) Deux point quelconque sont dans un même appartement (c'est-à-dire un plongement de $\mathbb{R}^n$).
(3) Chaque mur est contenu dans (au moins) trois appartements.

Lorsque le groupe H est discret, l'immeuble est muni d'une structure de complexe polysimplicial.

Cette structure apparaît naturellement pour jouer le rôle de l'espace symétrique associé à un groupe de Lie qui est un groupe algébrique sur un corps valué non archimédien. L'immeuble est alors un immeuble de Bruhat-Tits. Par exemple $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit sur un arbre, [Ser77]. On rencontre aussi des immeubles lorsque l'on fait "dégénérer" un espace symétrique (voir page 13).

2.2. **État de l'art.** Cette section n'a pas vocation à constituer une bibliographie exhaustive des sujets abordés mais une sélection de travaux qui ouvrent la voie au programme de recherche. C'est l'occasion de donner quelques détails sur mes contributions.

2.2.1. *Sur le comportement des invariants.* Le premier résultat de cette section constitue le théorème principal de l'influent article [BCG95].

Théorème 3 ([BCG95])**.** *Soit (M, g_0) un espace localement symétrique compact de rang 1 et de dimension $n \geqslant 3$. La donnée de toute autre métrique g sur M conduit à l'inégalité*

$$h(g_0)^n \operatorname{Vol}(M, g_0) \leqslant h(g)^n \operatorname{Vol}(M, g)$$

L'égalité n'a lieu que lorsque g est isométrique à g_0.

Ainsi le volume et l'entropie sont des invariants complets de la géométrie symétrique de rang 1. Les applications de ce résultats sont nombreuses. Mentionnons par exemple un théorème de rigidité dynamique sous l'hypothèse de conjugaison des flots, une preuve explicite du théorème de rigidité de Mostow [BCG96] et un calcul précis du volume minimal dans le cas hyperbolique réel [BCG95, chapitre 9], via l'inégalité de Gromov-Bishop qui, selon une hypothèse de courbure, donne une estimée du volume des boules.

Ce théorème est à la base de mes travaux de thèse. Il a été étendu dans deux autres cas, un énoncé général qui impliquerait un espace localement symétrique compact quelconque, restant encore à démontrer. On a en effet

Théorème 4 ([CF03])**.** *Soit (M, g_0) un espace localement symétrique compact de dimension n dont le revêtement universel est le produit d'espaces symétriques de rangs 1 et de dimensions supérieures à 3. Alors, pour toute autre métrique g sur M, on a*

$$h(g_0)^n \operatorname{Vol}(M, g_0) \leqslant h(g)^n \operatorname{Vol}(M, g)$$

L'égalité n'a lieu que lorsque g est isométrique à g_0.

Puis

Théorème 5 ([Mer16b])**.** *Soit (M, g_0) un espace symétrique compact dont le revêtement universel est un produit de plans hyperboliques $\left(\mathbb{H}^2\right)^n$. Pour toute autre métrique g sur M,*

$$h(g_0)^{2n} \operatorname{Vol}(M, g_0) \leqslant h(g)^{2n} \operatorname{Vol}(M, g)$$

Bien qu'optimale, l'inégalité ne vient pas avec son cas d'égalité. Noter qu'en raison de l'absence de résultat de rigidité de Mostow dans $\mathbb{H}^2$, le cas d'égalité n'est conjecturé que pour certains espaces (irréductibles).

Les preuves de ces trois théorèmes ont un tronc commun qu'il s'agit maintenant de présenter. Cela expliquera notre approche pour attaquer certaines questions encore ouvertes. On procède en deux grandes étapes, l'une de *plongement*, l'autre de *calibration*. On rappelle qu'afin de distinguer les métriques symétriques des métriques riemanniennes quelconques, on utilise les notations de la page 3.

(1) À chaque métrique g, on associe un plongement Γ-équivariant $\Phi_g : \tilde{X} \to \mathrm{L}^2(\partial_F \tilde{M})$ qui d'ailleurs est à valeur dans la sphère unité $\mathcal{S}^\infty$ de $\mathrm{L}^2(\partial_F \tilde{M})$. Noter que le désagrément à travailler en dimension infinie dans $\mathrm{L}^2(\partial_F \tilde{M})$ est largement compensé par le fait que $\mathrm{L}^2(\partial_F \tilde{M})$ porte en un seul espace des informations géométriques sur *toutes* les métriques riemanniennes déposées sur M. Ce plongement Φ_g est construit avec les mesures de Patterson-Sullivan (voir page 6) de $\Gamma = \pi_1(X)$ lorsque g est à courbure négative ou par une variante si ce n'est pas le cas. Noter que le choix du bord est décisif en rang supérieur.

(2) Il s'agit ensuite de montrer que le plongement le plus canonique Φ_{g_0}, celui associé à la métrique symétrique g_0, est minimal et minimisant ou autrement dit que $\Phi_{g_0}(\tilde{M})$ est une sous-variété minimale et minimisante (parmi toutes les sous-variété du type $\Phi_g(\tilde{X})$). L'équivariance des plongements ramène naturellement le problème au cas de variétés compactes. En particulier les sous-variétés $\Phi_g(\tilde{X})$ ont un "volume" : celui de tout domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\tilde{X}$ calculé avec la métrique rappelée par Φ_g de la métrique canonique de $\mathrm{L}^2(\partial_F \tilde{M})$.

Pour comprendre que c'est ce problème de sous-variété minimale qu'il s'agit de résoudre, il faut relier le volume de la sous-variété $\Phi_g(\tilde{X})$ à l'entropie et au volume usuel de la métrique g. On trouve

$$\operatorname{Vol}\Phi_g(\tilde{X}) \leqslant h(g)^n \operatorname{Vol}(g),$$

l'inégalité étant une égalité lorsque g est la métrique g_0.

La technique de calibration est une idée classique de la théorie des sous-variétés minimales (voir [HL82]), légèrement modifiée ici pour s'adapter à la dimension infinie. Elle consiste à exploiter la donnée d'une n-forme différentiable ω sur $\mathrm{L}^2(\partial_F\tilde{M})$ qui est

(i) Γ-invariante
(ii) fermée
(iii) et qui prend des valeurs maximales sur $\Phi_{g_0}(\tilde{M})$.

La définition même du volume, ainsi qu'un argument à la Stokes appliqué à la forme fermée ω nous donne alors

$$\operatorname{Vol}(\Phi_g) \geqslant \int_M \Phi_g^*(\omega) = \int_M \Phi_{g_0}^*(\omega) = \operatorname{Vol}(\Phi_{g_0}),$$

ce qui, combiné avec les calculs de $\operatorname{Vol}\Phi_g$ donne l'inégalité dans les théorèmes.

Comme on le voit, le cœur de l'argument consiste à trouver une forme calibrante ω. À ce stade, les preuves envisagées dans [BCG95] et [Mer16b] bifurquent. Dans le premier article, la forme calibrante est construite à l'aide de l'application de barycentre des mesures, qui jouit de fantastiques propriétés de régularisations globales (analysées dans [BCG96]). Dans le second article, j'ai utilisé une stratégie pour fabriquer beaucoup de formes différentielles sur $\mathrm{L}^2(\partial_F\tilde{M})$ et cherché à comprendre lesquelles étaient susceptibles de fournir des calibrations. Cette stratégie s'implémente de la façon suivante. On munit $\partial_F\tilde{M} = G/\mathrm{Stab}_G(\xi)$ de l'unique mesure K-invariante $d\theta$ sur $G\cdot\xi$. Puis, soit

$$c : \left(\partial_F\tilde{M}\right)^{n+1} \to \mathbb{R}$$

une fonction antisymétrique et bornée. Avec celle-ci on construit une forme différentielle $\omega(c)$ sur $\mathcal{S}^\infty$ par

$$\omega(c)_\varphi(f_1,\cdots,f_n) = \int_{\left(\partial_F\tilde{M}\right)^{n+1}} c(\theta_0,\cdots,\theta_n)\varphi^2(\theta_0)\varphi(\theta_1)f_1(\theta_1)\cdots\varphi(\theta_n)f_n(\theta_n)d\theta_0\cdots d\theta_n,$$

où φ est une fonction de $\mathcal{S}^\infty$ et les f_i sont tangentes en φ à $\mathcal{S}^\infty$, c'est-à-dire,

$$\int_{\partial_F\tilde{M}} \varphi(\theta)f_i(\theta) = 0.$$

On démontre ensuite les deux faits suivants

(i) La forme $\omega(c)$ est Γ-invariante si c est Γ-invariante (pour l'action diagonale de Γ).
(ii) La forme $\omega(c)$ est fermée si c est fermée au sens de la cohomologie, c'est-à-dire si

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i c(\theta_0,\cdots,\hat{\theta}_i,\cdots,\theta_n) = 0$$

Ainsi donc, en résumé, pour construire une forme différentielle qui peut être calibrante, il faut que c définisse une classe de cohomologie bornée de Γ (ou, de manière équivalente de M). Ce groupe de cohomologie bornée est immense; par exemple, dans le cas des surfaces, il n'est pas de dimension finie. Mais, si l'on veut que l'argument s'adapte à tous les réseaux Γ simultanément, il est commode de choisir une application c qui est G-invariante et non pas seulement Γ-invariante. Dans le cas des réseaux de $\left(\mathbb{H}^2\right)^n$, le groupe de cohomologie bornée $H_b^{2n}((\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))^n)$ est de dimension 1, engendré par le cup product de classes d'Euler (voir [BK08]). Pour le cas des groupes de Lie semi-simple en général, le même résultat est conjecturé.

Quoi qu'il en soit, pour terminer la preuve du théorème principal de [Mer16b], il suffit de vérifier qu'un cocycle bien choisi, générateur de $H_b^{2n}((\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))^n)$ convient. Cela passe par une analyse explicite et assez fine de la transformée de Fourier du cocycle.

2.2.2. *Courbure de Ricci et entropie volumique.* Dans une optique récente, l'entropie prétend jouer le rôle de substitut à la courbure de Ricci. Cette comparaison entropie/courbure de Ricci est rendue possible par l'inégalité de Gromov-Bishop qui traduit une borne inférieure sur la courbure en une borne supérieure sur l'entropie [GHL04, théorème 3.101]. Bien sûr, l'entropie est un invariant beaucoup plus faible. Un programme de recherche peut donc s'organiser de la manière suivante.

(1) Trouver un énoncé de la littérature riemannienne qui fait intervenir une hypothèse sur la courbure de Ricci.
(2) Que reste-t-il de cet énoncé si l'on remplace courbure de Ricci par entropie ?

L'enjeu de ce programme de recherche consiste à englober une classe beaucoup plus large d'espaces métriques, l'entropie étant définie sur chaque espace métrique mesuré, ce qui est beaucoup plus souple que la notion de variété riemannienne. C'est dans cet esprit que deux travaux récents ont vu le jour, [BCGS17] et [BM20]. Le deuxième article est le fruit d'une collaboration avec Florent Balacheff (Barcelone). Le théorème principal est une inégalité géométrique qui permet d'estimer l'entropie en fonction du bas du spectre des longueurs. Sa valeur réside dans son application en un "lemme du collier" généralisé et rentre dans le cadre précédent. Le lemme du collier est un résultat classique de la théorie des surfaces

hyperboliques. Il affirme que si α et β sont deux courbes qui s'intersectent sur une surface hyperbolique fermée, alors (on note l_1 la longueur de α et l_2 celle de β),

$$\sinh \frac{l_1}{2} \sinh \frac{l_2}{2} \geqslant 1.$$

Ainsi, plus la longueur de α est petite, plus la largeur du "collier" qui l'entoure est grande. Nous obtenons alors en particulier le résultat suivant.

Théorème 6 ([BM20])**.** *Soit M une variété riemannienne fermée d'entropie h et soit c_1 et c_2 deux lacets basés en un point $x \in M$ qui engendrent un groupe libre dans $\pi_1(M, x)$. Alors*

$$\ell(c_2) \geqslant \frac{1}{h} \log \left(\frac{4}{h\ell(c_1)} \right) + o(1)$$

pour $\ell(c_1)$ proche de 0.

C'est une large généralisation du lemme du collier puisque l'énoncé concerne n'importe quelle variété riemanienne (dont le groupe fondamental contient un groupe libre) et non pas seulement des surfaces hyperboliques (on remplace ainsi une hypothèse de courbure par une hypothèse sur l'entropie). L'estimée sur la taille du collier est du même ordre que dans le cas hyperbolique (pour lequel $h = 1$).

2.2.3. *Géométries de Hilbert.* À propos de l'entropie des géométries de Hilbert, le résultat le plus profond est sans doute dans l'article [Tho17].

Théorème 7 ([Tho17])**.** *Pour tout convexe compact Ω de $\mathbb{R}^n$, $\bar{h}(\Omega) \leqslant n - 1$.*

La limite est atteinte dans le cas hyperbolique. Mais, contrairement aux espaces symétriques, l'entropie ne joue aucun rôle de rigidité. En fait, dès que le bord du convexe Ω est suffisamment régulier, l'entropie est maximale.

Théorème 8 ([BBV10])**.** *Supposons que $\partial\Omega$ soit paramétrisé par une fonction φ de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Alors $h(\Omega) = n - 1$.*

D'autres situations ont aussi été étudiées, notamment le cas des convexes divisibles [Cra09]. Le travail présenté ensuite est le fruit d'une réflexion assez complète sur la relation entre la régularité du bord du convexe et la valeur de l'entropie. C'est une collaboration avec J. Cristina à Lausanne. L'idée est d'obtenir un résultat de nature suivante. Supposons que l'on se donne une famille d'espace de Banach B_α et que le bord d'un convexe Ω soit paramétrisé par une fonction $\varphi \in B_\alpha$. Peut-on exprimer l'entropie en fonction de α ? Nous obtenons deux résultats dans cette direction. Il serait tentant de penser que l'on peut tester le cas des régularités $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. Or rien n'empêche une fonction $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ d'être plus régulière et d'être du coup redevable des hypothèses du théorème précédent. Il faut donc considérer une classe d'espaces de Banach qui exprime qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ mais pas plus régulière. C'est le sens de l'hypothèse de α-Ahlfors régularité dans l'énoncé suivant.

Théorème 9 ([CM16])**.**

(1) Soit Ω un convexe de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est paramétrisé par une fonction φ dans l'espace de Sobolev $\mathcal{W}^{2,p}$ pour $p > n - 1$. Alors

$$h(\Omega) = n - 1.$$

(2) En dimension 2, supposons que la paramétrisation de Ω soit une fonction α-Ahlfors régulière. Alors

$$h(\Omega) = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}.$$

La première partie étend le théorème de [BBV10] car $\mathcal{C}^{1,1} = \mathcal{W}^{2,\infty}$.

(1) Le premier résultat s'obtient en suivant la démarche de [BBV10]. On constate que la densité de Busemann converge, lorsque le paramètre x approche un point ξ sur le bord, vers la courbure de $\partial\Omega$ en ξ. En régularité $\mathcal{C}^{1,1}$ la courbure du bord existe presque partout. En régularité plus basse, la courbure n'existe que sous forme d'une mesure sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et non plus ponctuellement et c'est donc une convergence en mesure dont il est question. Voulant calculer la limite sur des cercles de plus en plus grands de la moyenne de la fonction de Busemann sur ces cercles, la théorie géométrique de la mesure fournit les outils adéquats.

(2) Le deuxième résultat est plus difficile et s'obtient en deux étapes. On calcule dans un premier temps l'entropie de certains convexes de référence. Ces convexes sont obtenus en enroulant (la primitive de) la fonction "escalier du diable" de Lebesgue. On cherche ensuite à comparer la situation générale à cette situation de référence. Pour ce faire on utilise (et affine) un théorème de [MS09] de comparaison d'ensembles de Cantor réguliers. Noter que si φ est une fonction α-Ahlfors régulière, sa dérivée seconde au sens faible est une mesure supportée sur un ensemble de Cantor de dimension de Hausdorff α.

2.2.4. *Questions de rigidité/flexibilité.* C'est un thème transverse de mon activité de recherche. On a déjà rencontré dans ce texte le thème de la rigidité parmi les résultats de rigidité entropique du paragraphe 2.2.1 ou de flexibilité des représentations dans le théorème 11. Un objet mathématique est dit rigide s'il dépend de moins de paramètres que ce que sa définition naïve suggère. Par exemple, le célèbre théorème de Mostow affirme que si deux variétés hyperboliques compactes de mêmes dimensions supérieures à 3 sont homéomorphes, elles sont en fait isométriques. C'est un résultat de rigidité au sens où la structure géométrique ne dépend que de la topologie. À l'inverse, un objet est dit flexible s'il apparaît inchangé dans une famille de situations. Par exemple, les variétés hyperboliques compactes de dimension 2 sont flexibles car il en existe qui sont homéomorphes mais non isométriques (en fait tout un espace, l'espace de Teichmüller de la surface topologique).

En plus de vouloir classifier les objets flexibles et les objets rigides, un programme de recherche sur ces questions visera à établir deux types de résultats.

(1) Si un objet est rigide, quels sont les paramètres qui le caractérisent.
(2) Si un objet est flexible, quelle est la taille et la forme de son espace de déformations.

Groupes de Morse.

Le cœur convexe d'une variété hyperbolique $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ est le plus petit ensemble convexe qui porte toute la topologie de la variété (i.e sur lequel M se rétracte). Ce cœur convexe existe bien : c'est aussi le quotient par Γ de l'enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^n$ de $\Lambda(\Gamma)$. Une variété hyperbolique est dite convexe-cocompacte si son cœur convexe est compact. Le cœur convexe est encore l'ensemble récurrent de la dynamique du flot géodésique; c'est donc le lieu où la dynamique a de bonnes propriétés ergodiques. Dire qu'une variété est convexe-cocompacte revient à réclamer de bonnes propriétés topologiques (avoir la topologie d'une variété compacte) ou dynamiques (après avoir coupé certains morceaux de la variété, la dynamique vit sur un ensemble compact). Par extension on dit que le groupe $\Gamma = \pi_1(M)$ lui-même est convexe-cocompact si M l'est. Noter que les cusps des variétés hyperboliques sont convexes et non compacts et ils sont donc exclus de la théorie. Lorsqu'il s'agit de généraliser cette définition à d'autres géométries locales, par exemple lorsque le revêtement universel est un espace symétrique quelconque, on rencontre le problème suivant

Théorème 10 ([Qui05] et [KL06])**.** *Soit G un groupe de Lie de rang supérieur à 2 et Γ un groupe discret, irréductible et Zariski-dense de G. Si Γ est convexe-cocompact, alors Γ est cocompact.*

Les hypothèses servent à éviter les "fausses situations de rang 1". On pourrait en effet considérer le produit de deux variétés hyperboliques convexe-cocompactes qui mettraient le théorème en défaut; le fait que le groupe soit supposé irréductible nous prévient d'une telle situation. On pourrait encore considérer le cas d'un groupe de Lie de rang 2 ($O(2,n)$) qui contient un groupe de Lie de rang 1 ($O(1,n)$) et d'un groupe qui s'injecte dans le sous-groupe de rang 1; c'est cette fois l'hypothèse de Zariski-densité qui interdit cette situation.

Ainsi donc, en rang supérieur, la notion de convexe-cocompacité naïve ne produit pas d'autres exemples que les réseaux cocompacts, par ailleurs bien étudiés ([Zim84]). Basé sur certaines caractérisations de la convexe-cocompacité en rang 1 de [Bow95], l'article [KLP14b] propose une définition de la convexe-cocompacité adaptée au rang supérieur. Les auteurs proposent en effet une définition de "groupes de Morse", en référence à un certain lemme de Morse prouvé dans [KLP14a], qui coïncide en rang 1 avec la définition de la convexe-cocompacité.

Pour ne pas alourdir, l'exposition, il est sans doute préférable de ne retenir que deux propriétés fondamentales des groupes de Morse (c'est en fait presque une caractérisation).

(1) Un groupe de Morse est Gromov-hyperbolique.

(2) Les orbites d'un groupe de Morse Γ ne sont pas distordues, c'est-à-dire que les applications orbitales

$$\Gamma \to \Gamma \cdot x$$

sont des quasi-isométries pour toute métrique de mots sur le groupe.

En rang 1, les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes sont Gromov-hyperboliques tandis que les cusps créent de la distorsion.

Les groupes de Morse sont donc des groupes qui possèdent une action "de type rang 1" (dans la terminologie de [KLP14b]) sur un espace de rang supérieur. Et en tant que tels, il m'a semblé intéressant d'étudier leurs propriétés de déformations. En effet, les groupes de rang 1 peuvent se comporter de bien des façons différentes dans leurs possibilités de déformations : les réseaux sont flexibles en dimension 2 (espace de Teichmüller), rigides en dimension supérieures à 3 (théorème de Mostow) et il existe aussi des phénomènes intermédiaires de semi-rigidité [Bes88]. Étudier les déformations des groupes de Morse permet donc de les catégoriser.

Le théorème suivant donne une contrainte algébrique forte sur la possibilité de "partir à l'infini" dans l'espace des déformations.

Théorème 11 ([Mer16a])**.** *Soit (ρ_n) une suite de représentations uniformément de Morse d'un groupe Γ dans un espace symétrique $\tilde{M}$. On suppose que la suite ρ_n dégénère de façon contrôlée. Alors le groupe Γ se scinde en un produit libre de groupes de surfaces fermées et d'un groupe libre.*

Plus simplement cet énoncé dit que pour que l'espace des déformations des variétés convexe-cocompactes soit gros, il faut nécessairement s'appuyer sur un groupe "de dimension 2". C'est bien sûr un écho au manque de rigidité de Mostow pour les groupes de surfaces fermées.

L'hypothèse de Morse uniforme fait référence aux constantes de quasi-isométries mais s'applique à des métriques décrites au cours de la preuve suivante. L'hypothèse de dégénérescence contrôlée permet de supposer que l'on peut choisir un système de générateur du groupe Γ dont chaque longueur de courbe croît à la même vitesse. Noter que ces hypothèses ne sont pas outrageusement fortes puisque de telles suites de représentations existent dans le cas d'un groupe libre pour les groupes de Schottky et dans le cas des groupes de surfaces pour les représentations quasi-fuchsiennes [Ota01].

La preuve se propose de mettre en place les deux idées directrices suivantes.

Fait 1 : Partir à l'infini dans l'espace des représentations revient à considérer non plus une action du groupe Γ sur un espace symétrique mais sur un immeuble affine. L'immeuble affine est le *cone asymptotique* de l'espace symétrique et s'obtient en "dézoomant" l'espace (c'est-à-dire en contractant la distance riemannienne, en "regardant l'espace de plus loin"). Cette construction est une référence directe aux travaux [Pau97] et [Par12].

Fait 2 : Lorsque l'on veut faire de la théorie géométrique des groupes, c'est-à-dire comprendre la structure d'un groupe par l'intermédiaire de ses actions, il est beaucoup plus efficace de disposer d'une action sur un immeuble que d'une action sur un espace symétrique. Une illustration de cette philosophie est le théorème de Rips [GLP94] qui classifie toutes les actions libres de groupes sur des arbres.

La partie technique de la preuve consiste à montrer que l'on récupère une action de Morse sur l'immeuble à l'infini, que l'on peut plonger un arbre dans cet immeuble (obtenu comme le cône asymptotique du groupe lui-même) puis chercher à appliquer le théorème de Rips.

Espaces de Teichmüller universel et géométrie Anti-de Sitter.

Considérons un groupe de surface $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$. La théorie de Teichmüller classique étudie la géométrie de l'espace des représentations (fidèles et d'images discrètes) de Γ dans le groupe de Lie $\mathrm{PO}_0(2,1)$ qui est le groupe des isométries directes du plan hyperbolique (précisément on identifie dans l'espace de Teichmüller deux représentations qui sont conjuguées par un élément de $\mathrm{PO}_0(2,1)$). Par ailleurs, il existe une représentation canonique de $\mathrm{PO}_0(2,1)$ dans $\mathrm{PO}_0(2,2)$, qui est le groupes des isométries directes d'une variété Lorentzienne, appelé l'espace Anti de Sitter (AdS).[4]

[4]Une définition simple de AdS consiste à prendre comme variété le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ lui-même et comme métrique, sa métrique de Killing (renormalisée de sorte que la courbure soit exactement -1).

Les représentations $\rho : \Gamma \to \mathrm{PO}_0(2,2)$ ont attiré beaucoup d'attention récemment, en partie à cause du fait que AdS est une des huit géométries-modèle de Thurston et que de telles représentations permettent de construire des variétés qui sont localement modelées sur AdS (d'autres motivations proviennent de la physique, les géométries lorentziennes sont des modèles de l'espace-temps d'Einstein). Parmi ces représentations, celles qui se factorisent par une représentation de Γ dans $\mathrm{PO}_0(2,1)$ sont appelés représentations fuchsiennes; elles préservent un plan totalement géodésique (isométrique à $\mathbb{H}^2$) dans AdS et en particulier un cercle dans le bord à l'infini de AdS.

De petites déformations ρ_t de ρ continuent à préserver au bord un objet qui est topologiquement un cercle (mais géométriquement plus complexe) qu'on appelle quasi-cercle (et les représentations ρ_t sont appelées quasi-fuchsiennes). Précisément, un quasi-cercle est une application $f : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$ qui est quasi-symétrique (i.e qui est l'extension au bord d'une application quasi-conforme du disque dans lui-même).

Dans ce cas (quasi-fuchsien), le groupe $\rho_t(\Gamma)$ préservent aussi l'enveloppe convexe de ce quasi-cercle, qui est un convexe dans AdS (AdS est un sous-ensemble de l'espace projectif, la convexité s'entend au sens projectif). Ce convexe est bordé par deux surfaces, chacune isométrique au plan hyperbolique mais (convexité oblige), ces deux surfaces ne sont pas totalement géodésiques. Le lieu où ces surfaces ne sont pas totalement géodésiques (c'est-à-dire, le lieu de stricte convexité) est une lamination géodésique (dite lamination de plissage) et l'intensité de ce plissage est représenté par une mesure transverse à la lamination.

Résumons-nous : à toute représentation quasi-fuchsienne dans $\mathrm{PO}_0(2,2)$, on peut associer un quasi-cercle et une paire $\lambda_-, \lambda, +$ de laminations mesurées. En fait, on peut même se passer de représentation quasi-fuchsienne et considérer quasi-cercles et laminations indépendamment. On appelle espace de Teichmüller universel, l'espace de tous les quasi-cercles (non nécessairement invariants sous l'effet d'une représentation quasi-fuchsienne).

Dans notre travail en commun avec Jean-Marc Schlenker, nous étudions les relations entre ces différents objets. Nous obtenons en particulier le résultat suivant.

Théorème 12 ([MS20])**.** *Soit λ_-, λ_+ un couple de laminations remplissantes. Alors il existe un quasi-cercle au bord de AdS dont l'enveloppe convexe est bordée par deux surfaces plissées par les laminations λ_- et λ_+.*

Ce résultat répond à une conjecture de Thurston dans le cas AdS. L'hypothèse de laminations "remplissantes" n'est pas optimal mais fréquent (c'est le cas en particulier des laminations qui sont obtenues par des représentations quasi-fuchsiennes). Ce résultat a des conséquences sur la dynamique des "tremblements de terre" dans l'espace de Teichmüuller universel.

Du théorème de Cauchy au problème de Weyl.

Le résultat précédent s'inscrit dans une longue histoire de rigidité/flexibilité qui aboutit au problème de Weyl (le théorème 12 en est un cas particulier). Nous décrivons maintenant la genèse de ce problème.

On s'intéresse tout d'abord à des polyèdres dans la sphère $\mathbb{S}^3$, l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ ou l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. On peut associer à un polyèdre plusieurs familles d'invariants :

(1) Ses angles dièdres (les angles entre ses faces).
(2) Son type combinatoire (qui est un graphe).
(3) La longueur de ses arêtes.
(4) La géométrie de ses faces.

La donnée de 1. et 2. s'exprime sous forme de graphe (planaire) étiqueté. La question de la rigidité se formule en demandant sous quelles hypothèses on peut affirmer que la donnée d'un ou plusieurs de ces familles d'invariants caractérise un unique polyèdre (on peut aussi demander une rigidité forte qui exclut même les déformations du premier ordre, on parle alors de rigidité infinitésimale). Et celle de la flexibilité en demandant qu'après avoir fixé un ou plusieurs de ces invariants (plus éventuellement d'autres contraintes), quels sont les polyèdres réalisables avec ces invariants. Nous renvoyons au paragraphe 3.3.2 pour des questions ouvertes, voici maintenant un bref survol des résultats connus.

(1) Le premier résultat est un théorème de Cauchy (dont la preuve mérite un chapitre du Livre d'Erdös [AZ14, chapitre 12]). Il affirme que si deux polyèdres convexes ont mêmes types combinatoires et mêmes géométries des faces, ils sont isométriques. Autrement dit, parmi les polyèdres convexes, le type combinatoire et la géométries des faces déterminent les angles dièdres. Ce théorème est faux pour des polyèdres non convexes.
(2) Des polyèdres flexibles existent. R. Connelly dans [Con77] a construit (contre toute attente) une famille a un paramètre de déformations d'un polyèdre (nécessairement non convexe) qui préserve la géométrie des faces. Ces exemples sont rares.
(3) Plusieurs familles de polyèdres non convexes sont aussi rigides [CS10] et [IS10]
(4) La conjecture de Stoker est une conjecture de rigidité lorsque le polyèdre est convexe et lorsque les angles dièdres sont fixés. Elle est plus limpide dans le cas hyperbolique (les angles dièdres déterminent le polyèdre) alors qu'il faut prendre quelques précautions dans le cas euclidien (penser au cas d'un cube et d'un pavé par exemple). Dans ce cas, elle prétend que toute déformation qui préserve les angles dièdres préserve aussi les angles internes aux faces.
(5) Cette conjecture est fausse dans le cas sphérique [Sch00].
(6) Elle est démontrée en toute généralité (dans sa version infinitésimale) dans [MM11].
(7) Enfin, d'après un théorème de [HR93], un polyèdre convexe est déterminé par d'autres invariants comme son dual dans l'espace de Sitter.

Le problème de Weyl est une vaste extension du résultat de rigidité de Cauchy. Dans sa version classique, il demande si toute métrique de courbure positive sur la sphère peut se réaliser de manière unique comme comme la métrique induite au bord d'un convexe de $\mathbb{R}^3$. Les polyèdres correspondent à des métriques plates à singularité et sont donc un cas particulier. Ce problème original de Weyl est maintenant résolu, ainsi que son extension dans le cas hyperbolique [Pog73].

Qu'en est-il du cas des convexes non bornés ? La bonne question peut sembler difficile à formuler : le plan hyperbolique admet en effet une infinité de plongement totalement géodésiques dans $\mathbb{H}^3$. On espère alors que l'ajout de certaines condition sur le comportement à l'infini permette d'obtenir un énoncé satisfaisant. Parmi ces conditions à l'infini on par exemple le fait de rencontrer le bord en un quasicercle. Dans ce cas, le bord du convexe découpe donc le bord de $\mathbb{H}^3$ en deux composantes connexes, attachées l'une à l'autre le long du quasicercle par une application que l'on appelle application de recollement. On parvient alors aux deux conjectures suivantes, énoncées dans [Sch20].

Conjecture 13 (Problème de Weyl généralisé, version $\mathbb{H}^3$)**.** *Soit $\varepsilon > 0$ et soit g_-, g_+ deux métriques de courbure constante $K \in [-1+\varepsilon, -\varepsilon]$ sur le disque D. Soit $u : \partial_\infty(D, g_-) \mapsto \partial_\infty(D, g_+)$ un homéo quasisymétrique. Existe-t-il un unique convexe $\Omega \subset \mathbb{H}^3$ dont le bord à l'infini est un quasicercle, de sorte que les métriques induites sur les deux composantes connexes de Ω soient g_- et g_+ et que l'application de recollement soit u ?*

Conjecture 14 (Problème de Weyl généralisé, version AdS^3)**.** *Soit $\varepsilon > 0$ et soit g_-, g_+ deux métriques de courbure constante $K \in \left[-1-\frac{1}{\varepsilon}, -1-\varepsilon\right]$ sur le disque D. Soit $u : \partial_\infty(D, g_-) \mapsto \partial_\infty(D, g_+)$ un homéomorphisme quasisymétrique. Existe-t-il un unique convexe $\Omega \subset AdS^3$ dont le bord à l'infini est un quasicercle, de sorte que les métriques induites sur les deux composantes connexes de Ω soient g_- et g_+ et que l'application de recollement soit u ?*

Le résultat d'existence dans ces deux conjectures est connu et fait l'objet de [BDMS19].

Lorsque $K \to -1$ et $\varepsilon \to 0$, les surfaces de courbure constante sont remplacées par des surfaces plissées, de sorte que le théorème 12 constitue la partie existence du cas limite du problème de Weyl dans AdS^3.

3. Programme de recherche

Les projets de recherches présentés dans cette section sont séparés en deux niveaux de difficulté. Les questions rouges sont celles qui requièrent un peu d'investissement et un travail de plus longue haleine. Les questions bleues sont celles qui sont accessibles immédiatement avec les outils de mon champs de compétence. Sauf mauvaise surprise, chaque question est réaliste et on donne à chaque fois une idée de stratégie.

3.1. **Invariants globaux des variétés riemanniennes.**

3.1.1. *Dimension de Hausdorff de l'ensemble limite des groupes de Schottky.* Il s'agit de la poursuite de notre collaboration avec Florent Balacheff et fait partie du programme général décrit en 2.2.2. Dans [BM20], nous relions en effet entropie volumique et bas du spectre des longueurs d'une variété riemannienne compacte. Nous étudions maintenant l'entropie volumique des surfaces à bord. Pour les surfaces hyperboliques, cela revient à étudier la dimension de Hausdorff des groupes libres (aussi appelés groupes de Schottky) agissant sur $\mathbb{H}^2$. Ce projet est en fait double, l'un des aspects est purement hyperbolique, l'autre est riemannien.

Question 1 Soit (S, hyp) une surface hyperbolique à bord non vide. Peut on trouver une expression de l'entropie volumique de S comme une fonction des coordonnées de Fenchel-Nielsen de la surface.

L'approche la plus efficace pour calculer une dimension de Hausdorff consiste à utiliser le "formalisme thermodynamique [Jae14] ou [BCS18]. La théorie nous apprend que le problème revient à calculer l'entropie d'un certain graphe (métrique) et notre résultat précédent [BM20] s'applique.

Au-dela de la géométrie hyperbolique, on peut déposer sur une surface à bord n'importe quel type de métrique et se demander comment se comporte l'exposant critique du groupe en fonction de la métrique et poser la question suivante, motivée en partie par le projet décrit au paragraphe 3.3.4.

Question 2 Soit (S, hyp) une surface hyperbolique à bord non vide et soit g une autre métrique sur S de même volume et qui rende le bord géodésique et de même longueur que le bord hyperbolique. On note δ_0 l'exposant critique du groupe fondamental Γ calculé avec la métrique hyperbolique et δ celui calculé avec la métrique g. A-t-on alors $\delta \geqslant \delta_0$?

Il est peu réaliste de pouvoir obtenir une inégalité optimale. Toute les idées de preuve de la conjecture d'entropie minimale s'appuient en effet lourdement sur le fait que l'ensemble limite d'un groupe compact est le bord tout entier. Cela simplifie en effet énormément le calcul des mesures de Patterson-Sullivan.

En revanche, on peut s'attendre à obtenir une inégalité non optimale en faisant marcher les idées originelles de Gromov (techniques de smoothing) qui conduisaient déjà à des version non optimales de la conjecture d'entropie minimale dans [Gro83]. Ces techniques sont plus souples et pourraient fonctionner dans le cas des surfaces à bord.

Les variétés de Morse ne peuvent être compactes lorsque le rang du groupe de Lie d'isométries de $\tilde{M}$ est supérieur à 2. En effet, un groupe cocompact dans un groupe de rang supérieur n'est pas Gromov-hyperbolique. Ainsi, l'ensemble limite du groupe de Morse Γ ne remplit pas toute la sphère à l'infini $\partial_\infty \tilde{M}$ et il y a un intérêt certain à comprendre les propriétés de cet ensemble limite. Le problème que nous décrivons dans ce paragraphe constitue un prolongement de [Mer16a], au sens où nous cherchons à classifier les groupes de Morse en comparant leur comportement à des phénomènes de rang 1. En effet, les variétés hyperboliques réelles convexe-cocompactes ont un ensemble limite dont la dimension peut être arbitrairement proche de $n-1 = \dim \partial_\infty \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ [Sul79]. Alors que les variétés hyperboliques quaternioniques convexe-cocompactes ont un ensemble limite dont la dimension est uniformément distante de $\dim \partial_\infty \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$ [Cor90] (le cas complexe n'est pas connu). Pour le rang supérieur [Qui03] tend à indiquer que la situation pourrait être celle du cas quaternionique. Repenser son approche dans le cas des groupes de Morse permettrait de répondre à la question suivante.

Question 3 La dimension de Hausdorff de l'ensemble limite d'un groupe de Morse est-elle arbitrairement proche de $\dim \partial_\infty \tilde{M}$?

Noter que plusieurs caractérisations de la propriété de Morse sont démontrées dans [KLP14b], deux d'entre elles sont particulièrement adaptées à la situation puisqu'elles sont exprimées en terme de dynamique du groupe à l'infini. Une prépublication récente [GMT19] compare aussi la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite avec un certain exposant critique.

3.1.2. *Différents problèmes d'entropie minimale.* Revenons au cas de l'entropie. Les méthodes de [Mer16b] en utilisant la cohomologie bornée du groupe fondamental ont une extension naturelle pour l'espace symétrique dont le groupe de Lie est $\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$, l'espace de Siegel. En effet le cocycle borné qui a servi à conclure la preuve du théorème 5 possède un équivalent direct pour le groupe $\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$: le cocycle de Maslov de [BG92]. Je me suis beaucoup penché sur la question et je n'en ai pour l'instant tiré qu'une inégalité de calibration approchée, non optimale. Cela est probablement du à la technicité supérieure de plusieurs aspects du problème. Bien qu'une telle inégalité ne soit déjà pas sans intérêt (elle démontre en particulier que l'entropie minimale est strictement positive), il existe probablement un moyen de terminer le calcul.

Question 4 Démontrer une inégalité d'entropie minimale pour un quotient compact de l'espace de Siegel (ou se contenter d'une inégalité approchée).

Toujours pour le même problème d'entropie minimale, il est permis de penser que le cas des espaces symétriques hermitiens est accessible en toute généralité (voir une proposition d'approche plus bas).

Question 5 Démontrer un résultat d'entropie minimale pour les espaces symétriques hermitiens.

La spécificité des espaces hermitiens vis-à-vis du problème d'entropie minimale tient au fait que la forme kählérienne d'un espace hermitien vérifie une certaine inégalité, adaptable à la calibration, l'inégalité de Wirtinger [Fed69, p. 40]. Cette inégalité bien connue a déjà servie dans le contexte des surfaces minimales en tant qu'inégalité de calibration : [HL82] et [Ber72] et même pour le problème de l'entropie minimale de $\mathbb{H}^2$: [BCG95, chapitre 6]. Elle affirme que toute sous-variété complexe est calibrée par une puissance adaptée de la forme kählérienne. Bien sûr, cette seule remarque ne suffit pas puisqu'il faut encore trouver un moyen d'amener cette forme de Kähler sur l'espace des mesures au bord, ce qui n'a rien de naturel. Voici cependant comment cela fonctionne dans $\mathbb{H}^2$. Noter que $\mathbb{H}^2$ est lui-même un espace hermitien (c'est une droite hyperbolique complexe). Le groupe des difféomorphismes du cercle, $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ agit sur l'espace des mesures par changement de variables et l'orbite de la fonction constante 1 est dense. Dans l'article [KY87], cette orbite est pensée comme un espace homogène,

$$\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)/\mathbb{S}^1.$$

C'est un espace kählérien : pour la structure complexe, il suffit de prendre une fonction dans l'orbite de $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$, de la décomposer en série de Fourier, (ce qui donne un système de coordonnées), puis de changer $\cos(n\cdot)$ en $\sin(n\cdot)$ et $\sin(n\cdot)$ en $-\cos(n\cdot)$, c'est-à-dire que $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)/\mathbb{S}^1$ est un produit de plans complexes. La forme kählérienne est précisément la forme calibrante que nous construisons avec la méthode du cocycle de la page 9. Dans [Kir04], il est expliqué que toute orbite coadjointe jouit de telles propriétés. Pour implémenter cette méthode au cas des espaces hermitiens complexes, il faut donc

(1) Soit comprendre comment construire sur l'espace de mesures sur le bord une structure complexe à partir de la structure complexe de l'espace hermitien.
(2) Soit interpréter l'espace des mesures (un ensemble dense suffirait) comme une orbite coadjointe sous l'action d'un "groupe de Lie" de dimension infinie. Cela demande de clarifier certains problèmes de régularité (c'est d'ailleurs un enjeu indépendant) inhérent à ce type de contexte.

Nous avons vu les rapports qu'il existe entre entropie minimale, calibration et cohomologie bornée. En fait, il se pourrait que les liens soient encore plus étroits.

La norme d'une classe de cohomologie bornée $[c]$ est la quantité

$$\|[c]\| = \inf_{c' \sim c} \left|c'\right|$$

Pour calculer cette norme, il faut donc trouver le cocycle c' cohomologue à c et de plus petite norme absolue. Dans [Mer16b], je montre que la forme calibrante se construit avec le cup produit de classes d'Euler (toujours avec la méthode de 9). Dans [BK08], M. Bucher-Karlsson montre que ce même cocycle réalise la norme de sa classe. Cette troublante analogie nous conduit à formuler la question suivante

Question 6 Est-il vrai qu'un cocycle qui réalise la norme de sa classe donne une forme calibrante ?

Cette question semble difficile mais se découpe en deux parties qui sont indépendantes et plus faciles. En effet, si on suppose que le cocycle qui réalise la norme est nul sur les cobords (c'est le cas du cocycle de [BK08]), cette condition s'interprète très facilement du côté de la forme différentielle associée et permet d'en tirer beaucoup d'informations. Ainsi donc, il s'agirait de montrer que cette condition est toujours réalisée et qu'elle simplifie largement le problème de la calibration.

La question réciproque de la question précédente peut se poser aussi mais je n'ai pas d'opinion sur une façon de l'attaquer.

L'entropie minimale des espaces symétriques est aussi reliée au volume minimal de la page 7. En effet, par l'intermédiaire de la formule de Bishop, l'entropie peut être vue comme une version éparpillée de la courbure de Ricci : une hypothèse de courbure de Ricci se transmet à l'entropie. L'inégalité de Bishop n'est optimale que dans le cas hyperbolique réel puisqu'elle revient à comparer les volumes de boules à ceux du modèle de courbure constante. Besson, Courtois et Gallot montrent alors dans [BCG95] que le volume minimal d'une variété qui supporte une métrique hyperbolique réelle est donné par la métrique hyperbolique.

Question 7 Adapter l'inégalité de Bishop à d'autres modèles localement symétriques. En déduire des résultats sur le volume minimal pour de espaces localement symétriques de rangs supérieurs.

Une dernière avancée dans le problème de l'entropie des espaces localement symétriques concerne les variétés non compactes mais de volume fini. Dans ce cas, il est courant de remplacer l'entropie de la métrique g par l'exposant critique du groupe. C'est d'ailleurs ce que font [BCS05] et [Sto06]. Une fois cette convention posée, le problème se formule comme dans le cas compact.

Question 8 Démontrer un théorème d'entropie minimale pour des quotients non compacts de $\left(\mathbb{H}^2\right)^n$ lorsque les métriques g et g_0 sont de volume fini.

En plus de remplacer l'entropie de g par l'exposant critique du groupe fondamental, [Sto06] décrit les autres ajustements à effectuer. Une des étapes de la preuve dans le cas compact fait usage du théorème de Stokes dans un domaine fondamental pour l'action du groupe. Ce théorème nécessite bien sûr de la compacité. Le remède revient alors à appliquer le théorème de Stokes sur une exhaustion par des compacts du domaine fondamental et à contrôler le reste qui est le volume des plongements Φ_g dans les cusps. La géométrie des cusps des variétés modelées sur $\left(\mathbb{H}^2\right)^n$ est bien comprise, ce sont des variétés SOL (voir aussi [CF03] qui traite du cas non compact).

3.2. **Géométrie métrique.**

3.2.1. *Les problèmes d'entropie minimale dans des contextes métriques.* La première question de ce paragraphe m'a été posée par F. Paulin à Orsay. Elle vise à établir des variantes des résultats d'entropie minimale lorsque la géométrie est modelée sur celle d'un immeuble. Le cas des arbres est déjà bien connu, [Lim08] et [KN07] et va dans le sens du théorème riemannien : la métrique d'entropie minimale sur le quotient d'un arbre régulier (dont tous les sommets ont mêmes valences) est la métrique "symétrique", celle qui donne le même poids à chaque arête.

Dans le cas des immeubles, la question est trop difficile en toute généralité mais il y a un analogue d'un cas riemannien étudié dont le résultat correspondant dans les immeubles n'a pas été établi : celui des produits d'arbres. Soit donc M un complexe cubique dont le revêtement universel est un produit d'arbres réguliers. On munit M de la métrique g_0 qui est euclidienne dans chaque cube et qui dépose une métrique "symétrique" sur chaque facteur du 1-squelette. Les métriques g que l'on veut comparer à g_0 sont des métriques riemanniennes quelconque dans l'intérieur des cubes qui rendent géodésiques (au sens euclidien) les bords de ces cubes.

Question 9 Montrer que g_0 minimise l'entropie parmi toutes les métriques g de mêmes volumes.

Les principaux ingrédients de la preuve riemannienne existent toujours dans ce contexte des immeubles. En effet, les mesures de Patterson-Sullivan sont construites de façon similaire dans ce cadre [Qui02] ainsi que le barycentre des mesures [Pau96]. Il s'agit de faire jouer le même rôle à ces objets.

Reprenons une dernière fois le cadre classique des espaces symétriques. Dans [Ver99], l'auteur montre que la métrique symétrique (en rang supérieur) *ne minimise plus* l'entropie parmi les métriques finslériennes de volume fixé. Il construit une métrique de Finsler qui minimise l'entropie mais seulement parmi les métriques qui sont G-invariantes (pour définir une métrique sur le quotient, la Γ-invariance suffirait). Ses méthodes sont différentes des techniques de la page 9, de nature plus algébrique. Il est

conjecturé que la métrique de P. Verovic minimise l'entropie parmi toutes les métriques de Finsler Γ-invariantes. Répondre à cette conjecture semble difficile. La question suivante serait une première étape (et d'un intérêt indépendant).

Question 10 Peut on construire une famille de mesure de Patterson-Sullivan associée à la métrique finslérienne de [Ver99] ?

En rang supérieur, les groupes co-compacts ne sont pas des groupes de Morse. Néanmoins, récemment dans [DK19], les auteurs construisent cette famille de mesure dans le cas des groupes de Morse. C'est une grande source d'inspiration pour la question précédente. On pourrait aussi en déduire une profonde analyse de la dynamique du flot géodésique de cette géométrie.

3.2.2. *Retour aux géométries de Hilbert.* Deux questions naturelles pourraient constituer une suite du travail avec J. Cristina de [CM16] dans l'étude des géométries de Hilbert de basse régularité. On rappelle que nous calculons l'entropie finslérienne des convexes de régularité α-Ahlfors en fonction de α. D'autre part, [BBV10] montre que si la régularité est de classe à $\mathcal{C}^{1,1}$, l'entropie est maximale, égale à 1. Or, il existe encore des espaces de Banach intermédiaires qui sont contenus dans tous les espaces $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ mais qui contiennent strictement $\mathcal{C}^{1,1}$. Cela conduit à se demander où est précisément le point de bifurcation d'entropie extrémale.

Question 11 Existe-t-il un espace de Banach qui contienne dans tous les espaces $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ et qui contienne une fonction qui engendre un convexe d'entropie strictement inférieure à 1. Existe-t-il un espace de Banach qui contient tous les espaces $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ et contenu strictement dans $\mathcal{C}^{1,1}$ qui permettent de construire des phénomènes mixtes entropie maximale/entropie inférieure à 1. Qu'en est il des mêmes phénomènes dans le cas opposé de l'entropie nulle ?

Noter que c'est aussi en basse régularité que l'on peut construire des exemples où l'entropie n'existe pas. La question de savoir où se situe précisément ce type de phénomènes est donc reliée.

Question 11 bis Pour quels espaces de régularités peut-on affirmer que $\overline{h} = \underline{h}$?

Les techniques de calcul d'entropies en basse régularité de notre article commun sont largement réutilisables puisqu'elles se proposent de faire usage de la dérivée seconde (au sens faible) et de relier les valeurs de l'entropie aux propriétés de l'espace métrique mesuré donné par le support de la dérivée seconde (qui est une mesure).

3.3. **Rigidité/Flexibilité.**

3.3.1. *Représentations de groupes discrets.* J'ai identifié dans [Mer16a] les situations où les représentations de Morse sont très flexibles et où l'espace des déformations est non compact. Comme annoncé à la section 2.2.4, l'objectif suivant est d'analyser la forme de l'espace des représentations. La question est trop vague si on ne fixe pas le groupe de Lie G, image des représentations et ne me semble en fait accessible avec les outils actuels que dans le cas où $G = \mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$. Il existe bien sûr des métriques naturelles sur l'espace des représentations mais il est naturel de s'intéresser dans un premier temps à la topologie de cet espace.

Question 12 Quelle est la topologie de l'espace des représentations de Morse d'un groupe de surface dans $\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$?

Une approche possible consiste à analyser le travail [BP15]. En effet les auteurs identifient des zones sur la surface (fixant une métrique hyperbolique annexe) pour lesquelles l'action du sous-groupe correspondant à la sous-surface est plus facile à comprendre, notamment par l'intermédiaire de son action sur le cône asymptotique de l'espace de Siegel.

Cela permet probablement de mettre en place une stratégie calquée sur la preuve de la simple connexité de l'espace de Teichmüller; les sous-surfaces de [BP15] jouant le rôle de la décomposition en pantalons, voir [tei91].

Toujours dans le cas des représentations de surface dans $\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$, la question suivante est mentionnée en toute généralité dans la thèse de M. Wolff mais semble se simplifier dans le cas des représentations de Morse. La motivation associée à ce problème est que sa résolution permet de décrire une compactification de l'espace des représentations. Bien sûr, la démarche consiste à suivre celle de [Wol11].

Question 13 Soit $(\rho_n)_n$ une suite divergente de représentations de Morse d'un groupe de surface dans $\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que la classe de Maslov de ρ_n est constante. Peut on définir une classe de Maslov de l'action limite du groupe de surface sur l'immeuble de type SP_{2n} ?

3.3.2. *Rigidité des polyèdres pour la géométrie de Hilbert.* C'est une partie de mon projet de recherche en commun avec J.M. Schlenker à Luxembourg. Elle s'articule autour de deux questions et les polyèdres en sont les objets principaux.

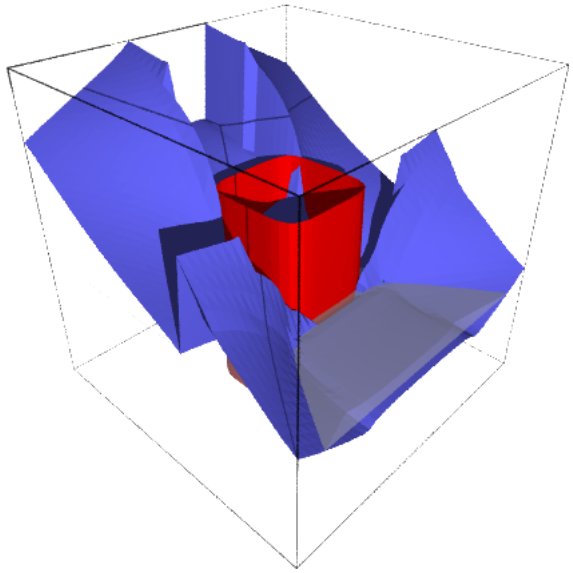
Rappelons tout d'abord que la distance de Hilbert est définie pour les points *à l'intérieur* d'un convexe de l'espace projectif. On se demande alors quelle structure peut avoir *l'extérieur* d'un convexe. Supposons d'abord que l'ensemble convexe est défini par une équation algébrique. Nous complexifions alors le convexe en complexifiant sont équation. Puis, par le théorème de Bezout, le droite complexe engendrée par deux points à l'extérieur du convexe rencontre le complexe complexifié en un certain nombre de paires de nombres complexes conjugués. On forme alors un birrapport en utilisant ces intersections complexes.

Les motivations pour cette construction sont nombreuses. Tout d'abord, cela permet de définir des *angles dièdres* pour les arêtes d'un polytope en géométrie de Hilbert. En effet le dual d'un polytope à l'intérieur d'un convexe est un polytope à l'extérieur du convexe dual. Il s'agit donc de définir un angle en utilisant la relation classique angle dièdre d'une arête = longueur de l'arête duale du polyèdre dual. Cette notion d'angles dièdres vient avec une formule de Schläffli, une formule variationnelle qui donne la dérivée du volume d'un polytope en fonction de la dérivée de ses angles dièdres. C'est une formule clé dans l'étude de la rigidité des polyèdres euclidiens. C'est donc naturellement que nous posons la question suivante.

Question 14 Étudier les propriétés de la distance définie en dehors d'un convexe projectif et l'utiliser pour construire une formule de Schläffli adaptée. À l'aide de cette formule, généraliser la classe des polyèdres rigides à une classe plus vaste.

Cette question s'inscrit aussi dans le contexte général du problème de Weyl.

Le dessin suivant a été fait avec un programme Sagemath. La partie rouge représente le convexe $x^6 + y^6 = 1$, la partie bleue est le graphe de la fonction "défaut d'inégalité triangulaire" pour la distance décrite plus haut. La partie grise représente le lieu ou cette fonction est négative, c'est-à-dire le lieu ou la distance vérifie une inégalité triangulaire inverse. On constate ici la cohérence avec le cas géométrie hyperbolique/géométrie de Sitter.



3.3.3. *Retour au problème de Weyl.* D'après le paragraphe 2.2.4, à un couple de laminations remplissantes correspond un quasi-cercle au bord de l'espace AdS qui permet de reconstruire les deux laminations comme laminations de plissage au bord de l'enveloppe convexe d'un quasi-cercle. La question se pose aussi pour un quasi-cercle au bord de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.

Question 15 Soit (λ^+, λ^-) un couple de laminations remplissant sur le disque $\mathbb{D}^2$. Il existe alors une application $u : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ dont l'image est un quasi-cercle tel que son enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^3$ soit borné par deux surfaces plissées le long de λ^+ et λ^-.

La réponse à cette question est connue dans le cas quasi-fuchsien [BO04].

Pour démontrer le théorème 12, nous utilisons un processus d'approximation du couple de laminations par des laminations polyédrales. Ce résultat d'approximation est encore vrai dans le cas hyperboliques et on peut donc envisager de récupérer une partie de la preuve. Dans la cas AdS, il est facile de contrôler géométriquement la divergence des constantes de quasi-symétrie du quasi-cercle (controler les constantes de quasi-symétrie permet d'utiliser des résultats de précompacité dans les applications quasi-fuchsiennes de constantes bornées), la divergence correspond à l'apparition d'un certain quasi-cercle très concret appelé le rhombus dans [BDMS19]. Dans le cas hyperbolique, la discussion doit s'accompagner d'un lemme de "non bubbling off" qui joue le même rôle. La démarche est entreprise dans [BO04].

3.3.4. *Stabilité $\mathcal{C}^0$ de l'entropie topologique.* Dans un projet en cours avec Marcelo Alvès (Bruxelles), Lucas Dahinden (Heidelberg) et Matthias Miewes (Aachen), nous étudions la régularité de l'entropie comme fonction de la métrique en topologie $\mathcal{C}^0$ (i.e on s'intéresse à des déformations continues de métriques (lisses)).

Voici par exemple l'un des projets qui nous tient à cœur. Le théorème de Denvir-Mackay [DM98] affirme que si une métrique sur le tore $\mathbb{T}^2$ admet une géodésique fermée contractile, son entropie est positive.

Question 16 Au voisinage ($\mathcal{C}^0$) d'une telle métrique sur le tore, l'entropie est elle positive ?

Noter que la question 2 permet de répondre positivement à cette question (même avec une inégalité non optimale). En effet, par la théorie de Morse, les métriques au voisinage de celle considérée par Denvir-Mackay satisfont à la même propriété d'avoir une géodésique fermée contractile. Par ailleurs la longueur de cette géodésique est continue en topologie $\mathcal{C}^0$.

References

[AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Buildings*, volume 248 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. Theory and applications.

[Alb99] P. Albuquerque. Patterson-Sullivan theory in higher rank symmetric spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 9(1):1–28, 1999.

[ÁPT04] J. C. Álvarez Paiva and A. C. Thompson. Volumes on normed and Finsler spaces. In *A sampler of Riemann-Finsler geometry*, volume 50 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 1–48. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[AZ14] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 2014. Including illustrations by Karl H. Hofmann.

[Bab92] I. K. Babenko. Asymptotic invariants of smooth manifolds. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 56(4):707–751, 1992.

[BBV10] Gautier Berck, Andreas Bernig, and Constantin Vernicos. Volume entropy of Hilbert geometries. *Pacific J. Math.*, 245(2):201–225, 2010.

[BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5):731–799, 1995.

[BCG96] Gérard Besson, Gilles Courtois, and Sylvestre Gallot. Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(4):623–649, 1996.

[BCGS17] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, and A. Sambusetti. Curvature-Free Margulis Lemma for Gromov-Hyperbolic Spaces. *ArXiv e-prints*, December 2017.

[BCS05] Jeffrey Boland, Chris Connell, and Juan Souto. Volume rigidity for finite volume manifolds. *Amer. J. Math.*, 127(3):535–550, 2005.

[BCS18] Martin Bridgeman, Richard Canary, and Andrès Sambarino. An introduction to pressure metrics for higher teichmüller spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(6):2001–2035, 2018.

[BDMS19] Francesco Bonsante, Jeffrey Danciger, Sara Maloni, and Jean-Marc Schlenker. The induced metric on the boundary of the convex hull of a quasicircle in hyperbolic and anti de sitter geometry. 2019.

[Ber72] Marcel Berger. Du côté de chez Pu. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5:1–44, 1972.

[Bes88] Mladen Bestvina. Degenerations of the hyperbolic space. *Duke Math. J.*, 56(1):143–161, 1988.

[Bes00] Laurent Bessières. Sur le volume minimal des variétés ouvertes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3):965–980, 2000.

[BG92] J. Barge and É. Ghys. Cocycles d'Euler et de Maslov. *Math. Ann.*, 294(2):235–265, 1992.

[BGS85] Werner Ballmann, Mikhael Gromov, and Viktor Schroeder. *Manifolds of nonpositive curvature*, volume 61 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

[BK08] Michelle Bucher-Karlsson. The simplicial volume of closed manifolds covered by $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. *J. Topol.*, 1(3):584–602, 2008.

[BM20] Florent Balacheff and Louis Merlin. A curvature-free $\log(2k-1)$ theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, page 1, Sep 2020.

[BO04] F Bonahon and J.-P Otal. Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3. 160:1013–1055, 11 2004.

[Bow95] B. H. Bowditch. Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Math. J.*, 77(1):229–274, 1995.

[BP15] M. Burger and M. B. Pozzetti. Maximal representations, non Archimedean Siegel spaces, and buildings. *ArXiv e-prints*, September 2015.

[Bus92] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[CF03] Christopher Connell and Benson Farb. Minimal entropy rigidity for lattices in products of rank one symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.*, 11(5):1001–1026, 2003.

[CM16] J. Cristina and L. Merlin. On the entropy of Hilbert Geometries of Low Regularities. *ArXiv e-prints*, December 2016.

[Con77] Robert Connelly. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (47):333–338, 1977.

[Cor90] Kevin Corlette. Hausdorff dimensions of limit sets. I. *Invent. Math.*, 102(3):521–541, 1990.

[Cra09] Mickaël Crampon. Entropies of strictly convex projective manifolds. *J. Mod. Dyn.*, 3(4):511–547, 2009.

[CS10] Robert Connelly and Jean-Marc Schlenker. On the infinitesimal rigidity of weakly convex polyhedra. *European J. Combin.*, 31(4):1080–1090, 2010.

[DK19] Subhadip Dey and Michael Kapovich. Patterson-sullivan theory for anosov subgroups. 2019.

[DM98] J. Denvir and R. S. MacKay. Consequences of contractible geodesics on surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(11):4553–4568, 1998.

[Ebe96] Patrick B. Eberlein. *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Fri17] Roberto Frigerio. *Bounded cohomology of discrete groups*, volume 227 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.

[GLP94] D. Gaboriau, G. Levitt, and F. Paulin. Pseudogroups of isometries of **R** and Rips' theorem on free actions on **R**-trees. *Israel J. Math.*, 87(1-3):403–428, 1994.

[GMT19] Olivier Glorieux, Daniel Monclair, and Nicolas Tholozan. Hausdorff dimension of limit sets for projective Anosov representations. *arXiv e-prints*, page arXiv:1902.01844, Feb 2019.

[Gro82] Michael Gromov. Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (56):5–99 (1983), 1982.

[Gro83] Mikhael Gromov. Filling Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(1):1–147, 1983.

[HL82] Reese Harvey and H. Blaine Lawson, Jr. Calibrated geometries. *Acta Math.*, 148:47–157, 1982.

[HR93] Craig D. Hodgson and Igor Rivin. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. *Invent. Math.*, 111(1):77–111, 1993.

[IS10] Ivan Izmestiev and Jean-Marc Schlenker. Infinitesimal rigidity of polyhedra with vertices in convex position. *Pacific J. Math.*, 248(1):171–190, 2010.

[Jae14] Johannes Jaerisch. Fractal models for normal subgroups of schottky groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 366(10):5453–5485, 2014.

[KH97] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1997.

[Kir04] A. A. Kirillov. *Lectures on the orbit method*, volume 64 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[KL97] Bruce Kleiner and Bernhard Leeb. Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (86):115–197 (1998), 1997.

[KL06] Bruce Kleiner and Bernhard Leeb. Rigidity of invariant convex sets in symmetric spaces. *Invent. Math.*, 163(3):657–676, 2006.

[KLP14a] M. Kapovich, B. Leeb, and J. Porti. A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and euclidean buildings. *ArXiv e-prints*, November 2014.

[KLP14b] M. Kapovich, B. Leeb, and J. Porti. Morse actions of discrete groups on symmetric space. *ArXiv e-prints*, March 2014.

[KN07] Ilya Kapovich and Tatiana Nagnibeda. The Patterson-Sullivan embedding and minimal volume entropy for outer space. *Geom. Funct. Anal.*, 17(4):1201–1236, 2007.

[KY87] A. A. Kirillov and D. V. Yur′ev. Kähler geometry of the infinite-dimensional homogeneous space $M = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Rot}(S^1)$. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(4):35–46, 96, 1987.

[Lee97] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.

[Lim08] Seonhee Lim. Minimal volume entropy for graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(10):5089–5100, 2008.

[Man79] Anthony Manning. Topological entropy for geodesic flows. *Ann. of Math. (2)*, 110(3):567–573, 1979.

[Mer16a] L. Merlin. A note on degenerations of Morse actions. *ArXiv e-prints*, December 2016.

[Mer16b] Louis Merlin. Minimal entropy for uniform lattices in product of hyperbolic planes. *Comment. Math. Helv.*, 91(1):107–129, 2016.

[Mil68] J. Milnor. A note on curvature and fundamental group. *J. Differential Geometry*, 2:1–7, 1968.

[MM11] Rafe Mazzeo and Grégoire Montcouquiol. Infinitesimal rigidity of cone-manifolds and the Stoker problem for hyperbolic and Euclidean polyhedra. *J. Differential Geom.*, 87(3):525–576, 2011.

[Mon01] Nicolas Monod. *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, volume 1758 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[MS09] Pertti Mattila and Pirjo Saaranen. Ahlfors-David regular sets and bilipschitz maps. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 34(2):487–502, 2009.

[MS20] Louis Merlin and Jean-Marc Schlenker. Bending laminations on convex hulls of anti-de sitter quasicircles. 2020.

[Ota01] Jean-Pierre Otal. *The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds*, volume 7 of *SMF/AMS Texts and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2001. Translated from the 1996 French original by Leslie D. Kay.

[Par12] Anne Parreau. Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini. *Math. Z.*, 272(1-2):51–86, 2012.

[Pau96] Frédéric Paulin. Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord. *J. London Math. Soc. (2)*, 54(1):50–74, 1996.

[Pau97] Frédéric Paulin. Dégénérescence de sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(11):1217–1220, 1997.

[Pei13] Marc Peigné. Autour de l'exposant de Poincaré d'un groupe kleinien. In *Géométrie ergodique*, volume 43 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 25–59. Enseignement Math., Geneva, 2013.

[Pog73] Aleksei V. Pogorelov. *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*. American Mathematical Society, 1973. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 35.

[PT14] Athanase Papadopoulos and Marc Troyanov, editors. *Handbook of Hilbert geometry*, volume 22 of *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2014.

[Qui] Jean-François Quint. An overview of patterson-sullivan theory. http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jquint/publications/courszurich.pdf.

[Qui02] J.-F. Quint. Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur. *Geom. Funct. Anal.*, 12(4):776–809, 2002.

[Qui03] Jean-François Quint. L'indicateur de croissance des groupes de Schottky. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(1):249–272, 2003.

[Qui05] J.-F. Quint. Groupes convexes cocompacts en rang supérieur. *Geom. Dedicata*, 113:1–19, 2005.

[Rob03] Thomas Roblin. *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*. Société mathématique de France, 2003.

[Sch00] J.-M. Schlenker. Dihedral angles of convex polyhedra. *Discrete Comput. Geom.*, 23(3):409–417, 2000.

[Sch20] Jean-Marc Schlenker. On the weyl problem for complete surfaces in the hyperbolic and anti-de sitter spaces. 2020.

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[Sto06] P. A. Storm. The minimal entropy conjecture for nonuniform rank one lattices. *Geom. Funct. Anal.*, 16(4):959–980, 2006.

[Sul79] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):171–202, 1979.

[tei91] *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Société Mathématique de France, Paris, 1991. Séminaire Orsay, Reprint of ıt Travaux de Thurston sur les surfaces, Soc. Math. France, Paris, 1979 [MR0568308 (82m:57003)], Astérisque No. 66-67 (1991) (1991).

[Tho17] Nicolas Tholozan. Volume entropy of Hilbert metrics and length spectrum of Hitchin representations into $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{R})$. *Duke Math. J.*, 166(7):1377–1403, 2017.

[Ver99] Patrick Verovic. Problème de l'entropie minimale pour les métriques de Finsler. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(6):1637–1654, 1999.

[Wol11] Maxime Wolff. Connected components of the compactification of representation spaces of surface groups. *Geom. Topol.*, 15(3):1225–1295, 2011.

[Yue96] Chengbo Yue. The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(12):4965–5005, 1996.

[Zim84] Robert J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.