

# Géométrie Hyperbolique et Groupes Discrets<sup>1</sup>

Louis Merlin

<sup>1</sup>Version non définitive

# Introduction

Ce texte constitue les notes d'un cours donné à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne au printemps 2017. Le contenu est adapté aux étudiants de Master qui ont déjà suivi un premier cours de géométrie différentielle <sup>1</sup> et qui sont à l'aise avec les concepts de base de l'algèbre linéaire, ainsi qu'avec quelques notions plus avancées d'algèbre bilinéaire. En revanche, nous n'utiliserons pas (sauf en une exception) la théorie générale de la géométrie riemannienne. Bien que la géométrie hyperbolique soit l'un des premiers exemples, expliquons pourquoi ce n'est pas indispensable et en quoi les méthodes exposées ici diffèrent des méthodes riemanniennes.

La géométrie hyperbolique est un espace métrique, où la métrique est un espace de longueur (on mesure la distance entre deux points comme la plus petite longueur de courbe qui joint ces deux points). Dans cette situation, la géométrie riemannienne se propose de développer une série d'outils de nature différentielle, par l'intermédiaire de champs de tenseurs sur la variété, obtenus en dérivant la métrique. Les résultats de la théorie consistent à interpréter géométriquement (ou au moins topologiquement) le comportement de ces tenseurs. Ici, notre point de vue est bien différent et beaucoup plus algébrique. En effet, ce qui singularise la géométrie hyperbolique et ce qui lui donne toute sa richesse, c'est la taille de son groupe d'isométries : la distance hyperbolique a énormément d'isométries.

Comparons, par exemple, la taille du groupe des isométries euclidiennes et des isométries hyperboliques. Cette comparaison peut être rendue possible par l'intermédiaire du bord des deux espaces (hyperboliques et euclidiens) : dans les deux cas, c'est une sphère. C'est un fait que les isométries peuvent se prolonger au bord (elles sont uniformément continues sur un ensemble dense) et elles déposent donc une certaine géométrie sur ce bord. La géométrie déposée par la structure euclidienne est la géométrie usuelle de la sphère, celle qui provient de son plongement canonique dans l'espace euclidien. La géométrie qui lui vient de l'espace hyperbolique est la géométrie conforme. Une transformation est dite conforme si elle préserve les angles. Autrement dit, les isométries euclidiennes préservent une distance sur la sphère tandis que les isométries hyperboliques ne préservent que les angles, ce qui est plus souple.

Cela explique pourquoi la stratégie employée dans ce cours consiste tout d'abord à montrer que le groupe des isométries est suffisamment transitif sur un certain nombre d'objets associés à la géométrie (sur l'espace lui-même, sur son bord, sur les géodésiques,...) puis à commencer les preuves par la remarque suivante :

Quitte à faire agir le groupe, on peut supposer que ...

...On peut supposer que la situation est explicite et plus simple.

Cette propriété remarquable de la géométrie hyperbolique pourrait laisser penser qu'il s'agit d'une géométrie exceptionnelle, anecdotique. En réalité, ce n'est pas le cas, c'est même en fait la géométrie la plus fréquente, la plus générique. Pour tenter de justifier

---

<sup>1</sup>En fait, seule la définition de variété différentiable sera utilisée

cette assertion, regardons le cas des surfaces. Rappelons que les surfaces compactes connexes et orientables sont classifiées topologiquement et qu'elles constituent la famille  $(\Sigma_g)_{g \geq 0}$  où  $\Sigma_g$  est la somme connexe de  $g$  tores (par convention  $\Sigma_0$  est la sphère).

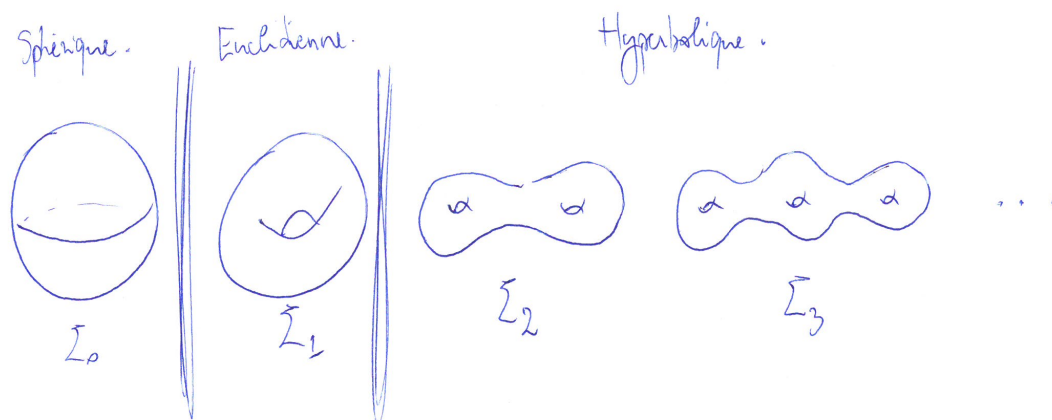


Figure 1: Classification topologique des surfaces

Il existe trois géométries classiques (qui correspondent aux trois géométries de courbure constante) : la géométrie sphérique, euclidienne et hyperbolique et on peut se demander s'il existe des métriques sur les surfaces  $\Sigma_g$  qui les rendent localement isométriques à l'un de ces trois espaces. Le théorème suivant illustre la généricité de la géométrie hyperbolique.

### Théorème.

1. Sur chaque surface, il existe une métrique et une et une seule des trois géométries qui lui est localement isométrique.
2. Sur la sphère  $\Sigma_0$ , il s'agit de la géométrie sphérique, sur le tore  $\Sigma_1$ , il s'agit de la géométrie euclidienne et sur toutes les autres surfaces  $\Sigma_g$  avec  $g \geq 2$ , il s'agit de la géométrie hyperbolique.

Le fait que l'une des géométries exclue les deux autres est une conséquence du théorème de Gauss-Bonnet. Le fait que les surfaces de genre  $g \geq 2$  admettent une métrique localement hyperbolique provient d'une construction explicite que nous verrons plus loin dans ce texte. Ce théorème est aussi une conséquence de l'uniformisation des surfaces de Riemann.

Une première motivation à l'étude de la géométrie hyperbolique est donc son omniprésence. Une seconde motivation est de nature historique. En effet la géométrie hyperbolique ne satisfait pas au cinquième axiome d'Euclide : étant donné une droite et un point extérieur à cette droite, il existe une infinité de droites parallèles passant par ce point. Elle répond donc (par la négative) aux nombreuses tentatives de preuves du cinquième postulat d'Euclide à partir des autres.

À ce stade de l'introduction, le lecteur aura bien compris que notre objectif est d'explorer la géométrie hyperbolique. Mais qu'en est-il des groupes discrets et comment ces deux sujets sont-ils reliés ? C'est que, dans une seconde partie de ce texte, nous nous intéressons aux variétés hyperboliques, c'est-à-dire aux variétés différentiables qui sont obtenues en recollant des morceaux de l'espace hyperbolique (nous avons déjà vu par exemple que l'on peut obtenir toute surface de genre  $g \geq 2$  de cette manière). Nous

montrerons alors un résultat qui affirme que toute variété hyperbolique est obtenue comme le quotient de l'espace hyperbolique par un sous-groupe discret de son groupe des isométries. Il y a donc une correspondance bijective

$$\{\text{variété hyperbolique}\} \longleftrightarrow \{\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n) \text{ discret}\}.$$

L'espace hyperbolique est donc le "modèle local" des variétés hyperboliques, ou, pour le dire avec la terminologie du chapitre 2, leur revêtement universel. C'est encore une fois la taille du groupe d'isométries qui donne toute sa richesse à la théorie : plus il y a d'isométries, plus il y a de groupes discrets. Reconsidérons une dernière fois la trichotomie sphérique, euclidienne et hyperbolique. Les groupes discrets d'isométries de la sphère sont des groupes finis, les groupes discrets d'isométries euclidiennes sont classifiés par le théorème de Bieberbach tandis qu'une classification des groupes discrets d'isométries hyperboliques semble inaccessible avec les outils actuels <sup>2</sup>.

Ce document s'organise alors de la façon suivante. Le premier chapitre concerne la géométrie hyperbolique proprement dite, avec une certaine emphase pour les dimensions 2 et 3. Le second chapitre, bien que d'un intérêt indépendant, consiste à mettre en place les préliminaires topologiques pour établir cette correspondance groupes discrets/variétés. Le dernier chapitre s'attaque à l'étude des groupes discrets d'isométries, en tachant de faire fonctionner ce dictionnaire entre les propriétés algébriques du groupe et les propriétés géométriques du quotient.

La rédaction de ce cours a grandement bénéficié des nombreuses discussions avec Adrien Marcone, lors des (interminables) séances de préparation des exercices. Je tiens à l'en remercier vivement. Toute erreur ou imprécision ne pourrait cependant pas lui être reprochée.

---

<sup>2</sup>On peut néanmoins constater des progrès spectaculaires obtenus avec les techniques de théorie géométrique des groupes [ref](#)

# Contents

<b>1</b>	<b>La géométrie hyperbolique</b>	<b>6</b>
1.1	Une étude préliminaire : le groupe de Möbius de la sphère . . . . .	6
1.1.1	Reflexions à travers des hyperplans . . . . .	6
1.1.2	Réflexions à travers des sphères . . . . .	6
1.1.3	Compactification d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	8
1.1.4	Groupe de Möbius de la sphère . . . . .	8
1.1.5	Extensions de Poincaré . . . . .	8
1.2	Différents modèles de la géométrie hyperbolique . . . . .	8
1.2.1	Le demi-espace supérieur . . . . .	8
1.2.2	La boule de Poincaré . . . . .	10
1.2.3	L'hyperboloïde et le modèle projectif . . . . .	11
1.2.4	Équivalence entre les modèles . . . . .	13
1.3	Géométrie des espaces hyperboliques . . . . .	15
1.3.1	Le groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$ . . . . .	15
1.3.2	Distances hyperboliques et géodésiques . . . . .	18
1.3.3	Bord à l'infini de l'espace hyperbolique . . . . .	24
1.3.4	Classification individuelle des isométries . . . . .	24
1.4	Quelques précisions supplémentaires en dimensions 2 et 3 . . . . .	26
1.4.1	Géométrie du plan hyperbolique . . . . .	26
1.4.2	Géométrie hyperbolique en dimension 3 . . . . .	31
1.5	Exercices corrigés pour le chapitre 1 . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Intermède : Groupe fondamental et revêtements</b>	<b>42</b>
2.1	Groupe fondamental . . . . .	42
2.2	Revêtements . . . . .	45
2.2.1	Généralités . . . . .	45
2.2.2	Actions de groupes topologiques . . . . .	47
2.2.3	Relèvements . . . . .	48
2.2.4	Action du groupe fondamental de la base sur la fibre . . . . .	50
2.2.5	Revêtement universel . . . . .	52
2.2.6	Théorie de Galois des revêtements . . . . .	54
2.3	Exercices corrigés pour le chapitre 2 . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Variétés hyperboliques</b>	<b>59</b>
3.1	Qu'est-ce qu'une variété hyperbolique . . . . .	59
3.1.1	Introduction . . . . .	59
3.1.2	$(G, X)$ -structure ou structure géométrique . . . . .	60
3.1.3	Développante et holonomie . . . . .	61
3.1.4	Complétude . . . . .	62
3.2	Groupes kleinien . . . . .	63
3.3	Groupes élémentaires . . . . .	65
3.3.1	Preliminaire sur les points fixes . . . . .	66

3.3.2	Sous-groupes élémentaires de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$	67
3.3.3	Sous-groupes discrets élémentaires	70
3.4	Régions fondamentales	71
3.4.1	Pavage et présentation	73
3.5	Géométrie des groupes fuchsien	77
3.5.1	Groupes géométriquement finis	77
3.5.2	Groupes fuchsien cocompacts	81
3.5.3	Signature d'un groupe fuchsien	84
3.6	Exercices corrigés pour le chapitre 3	85

# Chapter 1

## La géométrie hyperbolique

### 1.1 Une étude préliminaire : le groupe de Möbius de la sphère

Avant d'attaquer l'étude de la géométrie hyperbolique, nous commençons par un petit échauffement sur le groupe des transformations de la sphère qui préservent les angles. Nous montrerons ensuite que ce groupe est exactement le groupe des isométries de l'espace hyperbolique. Ce point de vue est important pour certaines propriétés de la géométrie hyperbolique.

#### 1.1.1 Reflexions à travers des hyperplans

Ces transformations sont probablement déjà bien connues. Notons  $E^n$  l'espace euclidien de dimension  $n$ , c'est-à-dire  $\mathbb{R}^n$  muni de sa métrique euclidienne usuelle ( $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ) puis

$$P(a, t) = \{x \in E^n \mid a \cdot x = t\}$$

où  $a$  est un vecteur de norme 1 et  $\cdot$  est le produit scalaire usuel obtenu par polarisation de  $\|\cdot\|$ . L'ensemble  $P(a, t)$  est l'hyperplan affine dont un vecteur normal est  $a$  et passant par le point  $ta$ .

La réflexion à travers l'hyperplan  $P(a, t)$  est l'application  $\rho$  définie par

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a$$

Les propriétés suivantes des réflexions sont bien connues ([ref](#)).

**Théorème 1.1.1.** *Soit  $\rho$  une réflexion dans un hyperplan  $P(a, t)$*

1. *Un point  $x$  est fixé par  $\rho$  si et seulement si  $x \in P(a, t)$ .*
2.  *$\rho$  est une involution.*
3.  *$\rho$  est une isométrie.*
4. *Inversement le groupe des isométries affines de  $E^n$  est engendré par les réflexions à travers les hyperplans*

#### 1.1.2 Réflexions à travers des sphères

Pour un point  $a \in E^n$  et un réel positif  $r$ , on note  $S(a, r)$  la sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$ , c'est-à-dire l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in E^n \mid |x - a| = r\}.$$

La réflexion (ou l'inversion)  $\sigma$  à travers la sphère  $S(a, r)$  est définie par la condition

$$\sigma(x) = a + s(x - a)$$

avec  $s$  un réel positif tel que

$$|\sigma(x) - a| \cdot |x - a| = r^2.$$

Cela conduit à l'expression de  $\sigma$

$$\sigma(x) = a + \left( \frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a)$$

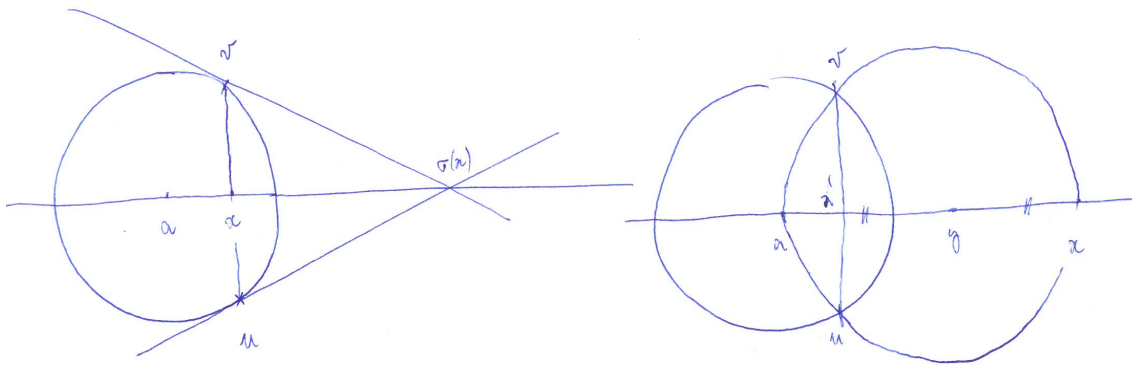


Figure 1.1: Comment construire l'image d'un point par une inversion

Le théorème suivant est l'analogue du précédent pour des réflexions à travers des sphères.

**Théorème 1.1.2.** *Soit  $\sigma$  une réflexion dans une sphère  $S(a, r)$ . Alors*

1.  $\sigma(x) = x$  si et seulement si  $x \in S(a, r)$ .
2.  $\sigma^2(x) = x$  pour tout  $x \neq a$ .
3. Pour  $x$  et  $y$  différents de  $a$ ,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{r^2 |x - y|}{|x - a| |y - a|}$$

**Preuve:** 1. Si  $\sigma(x) = x$ , alors, compte tenu de  $|\sigma(x) - a| \cdot |x - a| = r^2$ , on obtient  $|x - a| = r$ . Inversement, si  $|x - a| = r$ , la formule explicite montre que  $\sigma(x) = x$ .

2.

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= a + \left( \frac{r}{|\sigma(x) - a|} \right)^2 (\sigma(x) - a) \\ &= a + \left( \frac{|x - a|}{r} \right)^2 \left( \frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a) \\ &= x \end{aligned}$$



3.

$$\begin{aligned}
 |\sigma(x) - \sigma(y)| &= r^2 \left( \frac{(x-a)}{|x-a|^2} - \frac{(y-a)}{|y-a|^2} \right) \\
 &= r^2 \left( \frac{1}{|x-a|^2} - \frac{2(x-a) \cdot (y-a)}{|x-a|^2 |y-a|^2} + \frac{1}{|y-a|^2} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{r^2 |x-y|}{|x-a| |y-a|}
 \end{aligned}$$

□

Le fait que le point  $a$  joue un rôle particulier dans l'expression de  $\sigma$  (il est envoyé à l'infini) nous amène à rajouter à l'espace  $E^n$  un point de sorte que  $\sigma$  devienne une bijection sur le nouvel espace. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

### 1.1.3 Compactification d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$

On identifie  $E^n$  à  $E^n \times \{0\}$  dans  $E^{n+1}$ . La projection stéréographique de  $E^n$  sur  $\mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$  est définie en projetant  $x \in E^n$  sur le point  $\pi(x)$  de la sphère  $\mathbb{S}^n$  qui rencontre la droite passant par  $x$  et  $e_{n+1}$ .

Les conditions  $\pi(x) = x + s(e_{n+1} - x)$  et  $|\pi(x)|^2 = 1$  (d'où l'on déduit  $s = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$ ) permettent d'obtenir l'expression

$$\pi(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right)$$

### 1.1.4 Groupe de Möbius de la sphère

Il est conforme, transitif sur les sphères de  $\mathbb{S}^{n-1}$

### 1.1.5 Extensions de Poincaré

## 1.2 Différents modèles de la géométrie hyperbolique

Notre première tâche est de définir la géométrie hyperbolique. Nous donnons plusieurs définitions, qui correspondent à plusieurs "modèles" et nous montrons ensuite que ces points de vue sont équivalents. Il est commode de disposer de plusieurs incarnations de la géométrie hyperbolique, chacune d'entre elles servira à mener l'étude d'un aspect bien particulier de la géométrie. Par exemple, le modèle de l'hyperboloïde nous permettra de trouver le groupe des isométries; le modèle du demi-espace privilégie un point à l'infini tandis que celui de la boule privilégie un point à l'intérieur de l'espace hyperbolique. Compte tenu de la transitivité du groupe, ces deux modèles rendent explicites beaucoup de situation génériques.

### 1.2.1 Le demi-espace supérieur

On note  $\mathcal{U}^n$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$\mathcal{U}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_n > 0\}.$$

On veut maintenant munir cet ensemble d'une métrique. En tant qu'ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U}^n$  est une variété différentiable, dont chaque espace tangent s'identifie naturellement au même espace  $\mathbb{R}^n$  :

$$\forall x \in \mathcal{U}^n, T_x \mathcal{U}^n = \mathbb{R}^n.$$

Sur chacun de ces tangents, on définit une norme. En effet, pour  $x \in \mathcal{U}^n$  et  $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_x \mathcal{U}^n$ ,

$$\|v\|_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{x_n^2}.$$

Avec cette famille de norme, on peut mesurer la longueur des courbes.

**Définition 1.2.1.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}^n$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Alors la longueur de  $\gamma$  est donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)^2}}{\gamma_n(t)} dt$$

Soit  $p$  et  $q$  deux points de  $\mathcal{U}^n$ . Dans la suite, on notera  $\mathcal{C}_{p,q}$  l'ensemble des chemins de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}^n$  tels que  $\gamma(a) = p$  et  $\gamma(b) = q$ .

On obtient enfin une notion de distance sur  $\mathcal{U}^n$  (qu'on appelle en général un espace de longueur associé à la famille de normes  $(\|\cdot\|_x)_{x \in \mathcal{U}^n}$ ) en mesurant la longueur "plus petite courbe" qui joint deux points donnés.

**Définition 1.2.2.** Pour  $p$  et  $q$  deux points de  $\mathcal{U}^n$ , on note

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}} L(\gamma).$$

**Proposition 1.2.3.**  $d$  est bien une distance sur  $\mathcal{U}^n$ .

On dira alors que  $(\mathcal{U}^n, d)$  est le modèle du demi-espace supérieur de la géométrie hyperbolique.

**Preuve:** • La symétrie de  $d$  est évidente puisqu'il y a une bijection entre  $\mathcal{C}_{p,q}$  et  $\mathcal{C}_{q,p}$  en parcourant les chemins en sens inverse.

- On considère trois points  $p, q$  et  $r$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$  et soit  $\gamma_1$  un chemin qui joint  $p$  à  $q$  de longueur  $d(p, q) + \varepsilon$  et un chemin qui joint  $r$  à  $q$  de longueur  $d(r, q) + \varepsilon$ . Quitte à reparamétriser, on peut supposer que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont définis sur  $[0, 1]$ . On considère la courbe  $\gamma$  (qui joint  $p$  à  $q$  et définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Alors  $d(p, q) \leq L(\gamma) \leq d(p, r) + d(r, q) + 2\varepsilon$ .

- Le point le plus délicat consiste en fait à voir que  $d$  s'annule uniquement si les points sont les mêmes. Supposons donc que  $d(p, q) = 0$  et, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, choisissons une courbe  $\gamma_\varepsilon$  de  $\mathcal{C}_{p,q}$  de longueur  $L(\gamma_\varepsilon) \leq \varepsilon$ . Posons  $M_\varepsilon = \sup_{t \in [0,1]} \gamma_{\varepsilon,n}(t)$ . La stratégie consiste maintenant à borner  $M_\varepsilon$  (c'est le nombre qui sert de comparaison entre la situation hyperbolique et la situation euclidienne) puis à traiter le cas euclidien. Clairement  $M_\varepsilon \geq p_n$ . Pour majorer  $M_\varepsilon$ , remarquons déjà que le sup est un max

par continuité : il existe donc  $b \in [0, 1]$  tel que  $M_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,n}(b)$ . Puis, on a

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &\geq L(\gamma_\varepsilon) \\
 &\geq L(\gamma_{\varepsilon|[0,b]}) \\
 &= \int_0^b \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma'_{\varepsilon,i}(t)^2}}{\gamma_{\varepsilon,n}(t)} dt \\
 &\geq \int_0^b \frac{|\gamma'_{\varepsilon,n}(t)|}{\gamma_{\varepsilon,n}(t)} dt \\
 &\geq \left| \int_0^b \frac{\gamma'_{\varepsilon,n}(t)}{\gamma_{\varepsilon,n}(t)} dt \right| \\
 &= \log \left( \frac{\gamma_{\varepsilon,n}(b)}{\gamma_{\varepsilon,n}(0)} \right) \\
 &= \log \left( \frac{M_\varepsilon}{p_n} \right)
 \end{aligned}$$

On conclut que  $\log \left( \frac{M_\varepsilon}{p_n} \right) \leq \varepsilon$  puis donc que  $M_\varepsilon \leq p_n e^\varepsilon \leq 2p_n$  si  $\varepsilon$  est suffisamment petit (ce qu'on peut bien sûr supposer). Il suit que

$$\varepsilon \geq L(\gamma_\varepsilon) \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma'_{\varepsilon,i}(t)^2}}{\gamma_{\varepsilon,n}(t)} dt \geq \frac{1}{M_\varepsilon} \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma'_{\varepsilon,i}(t)^2} dt.$$

Or  $\int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma'_{\varepsilon,i}(t)^2} dt$  est la longueur euclidienne de  $\gamma$  (notons la  $l(\gamma)$ ). On est donc ramené à prouver la proposition dans le cas euclidien. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $p \neq q$ . C'est donc que pour un certain  $i$ ,  $p_i \neq q_i$ . Choisissons  $\varepsilon$  de sorte que  $\varepsilon < |p_i - q_i|$ , puis une courbe  $\gamma_\varepsilon$  avec  $l(\gamma_\varepsilon) \leq \varepsilon$ . On obtient

$$\varepsilon \geq l(\gamma_\varepsilon) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma'_{\varepsilon,i}(t)^2} dt \geq \int_0^1 |\gamma'_{\varepsilon,i}(t)| dt \geq \left| \int_0^1 \gamma'_{\varepsilon,i}(t) dt \right| = |p_i - q_i|,$$

ce qui est une contradiction. □

Cette preuve donne en plus un éclairage sur la topologie engendrée par la distance  $d$ . On a montré en effet que sur de petits ouverts, les distances euclidiennes et hyperboliques sont comparables (puisqu'on a réussi à borner  $M_\varepsilon$ ). Ainsi la topologie engendré par la distance hyperbolique et la topologie de  $\mathcal{U}^n$  comme ouvert de  $\mathbb{R}^n$  sont les mêmes. Seul l'aspect métrique n'a d'intérêt dans l'étude de la géométrie hyperbolique.

*Notation:*  $ds^2 = \frac{\sum dx_i^2}{x_n^2}$  l'élément de longueur hyperbolique (une quantité qui a donc vocation à être intégrée le long d'une courbe).

L'infimum de la définition de la distance peut sembler effrayant et la distance hyperbolique a l'air très peu maniable à première vue. Nous montrerons en fait que cet "inf" est un "min" et nous donnerons une description précise des courbes qui réalisent cet "inf" (voir section 1.3.2)

### 1.2.2 La boule de Poincaré

La démarche est similaire à la construction de la métrique hyperbolique du demi-espace. Cette fois-ci l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est la boule unité (euclidienne)

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

que l'on munit de la métrique (la preuve est semblable)

$$ds^2 = 4 \frac{\sum dx_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2}.$$

Cela signifie que l'on mesure la longueur des courbes par

$$L(\gamma) = \int_a^b 2 \frac{\sqrt{\sum \gamma_i'(t)^2}}{1 - \|\gamma(t)\|^2} dt$$

Et, toujours en analogie avec la paragraphe précédent,

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}} L(\gamma).$$

On se permet de noter les deux distances (de la boule et du demi-espace) de la même façon parce qu'on montrera qu'elles sont isométriques (constituant ainsi deux *modèles* de la même géométrie hyperbolique).

### 1.2.3 L'hyperboloïde et le modèle projectif

Nous décrivons maintenant un autre modèle de la géométrie hyperbolique qui est construit par analogie avec la géométrie sphérique. On rappelle que deux points  $p$  et  $q$  sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  sont à distance sphérique  $d$  si

$$\cos d = \langle p, q \rangle.$$

Notons alors  $\mathbb{R}^{n,1}$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de la forme quadratique canonique de signature  $(n, 1)$  (la forme de Lorentz),

$$q(x) = q(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2.$$

La ligne de niveau de  $q = -1$  (une hyperboloïde) a deux composantes connexes, selon que  $x_{n+1}$  est positif ou négatif. On note maintenant

$$\mathcal{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x) = -1 \text{ et } x_{n+1} > 0\}$$

puis encore  $x \cdot y$  le produit scalaire lorentzien, c'est-à-dire,

$$x \cdot y = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}.$$

**Lemme 1.2.4.** *Pour  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{H}^n$ , on a  $x \cdot y < 0$  (en fait même  $x \cdot y \leq -1$  et  $x \cdot y < -1$  si  $x \neq y$ ).*

**Preuve:** Supposons  $x \neq y$ . Puisqu'il n'y a qu'un seul point de  $\mathcal{H}^n$  par droite vectoriel, l'espace  $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$  est un plan. Et, par le théorème de Sylvester, c'est un plan de signature  $(1, 1)$  (pour la forme  $q$  restreinte). Son discriminant (dont on rappelle que seul le signe est bien défini) est négatif. D'où,

$$q(x)q(y) - (x \cdot y)^2 < 0.$$

On obtient donc  $(x \cdot y)^2 > 1$ . De ceci, on ne retient seulement que  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  sont supérieurs à 1. Puis, en utilisant

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = -1 + x_{n+1}^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = -1 + y_{n+1}^2,$$

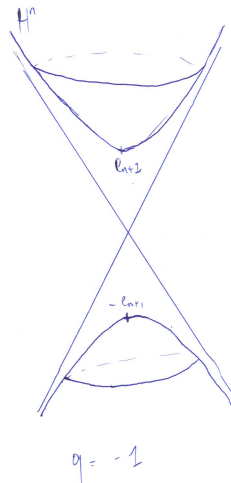


Figure 1.2: L'hyperboloïde à deux nappes et l'espace hyperbolique

on a

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1} \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} - x_{n+1} y_{n+1} \\
 &= \sqrt{x_{n+1}^2 - 1} \sqrt{y_{n+1}^2 - 1} - x_{n+1} y_{n+1}
 \end{aligned}$$

On vérifie enfin facilement que cette quantité est négative pour des variables supérieurs à 1.  $\square$

Pour  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{H}^n$ , ce lemme nous donne l'occasion de définir un nombre positif  $d(x, y)$  par

$$\cosh d(x, y) = -x \cdot y.$$

**Proposition 1.2.5.** *L'application  $(x, y) \mapsto d(x, y)$  est une distance sur  $\mathcal{H}^n$ .*

**Preuve:** Cela résultera des isométries entre les modèles.  $\square$

**Version infinitésimale de cette distance.** Comme dans les deux constructions précédentes, on peut en fait décrire cette distance en intégrant sur des courbes un "élément infinitésimal de longueur" (c'est-à-dire une norme sur chaque espace tangent). Prenons un élément  $x \in \mathcal{H}^n$ ; la restriction de la forme quadratique  $q$  à  $T_x \mathcal{H}^n$  est définie positive. Cela résulte du théorème de Sylvester et du lemme suivant

**Lemme 1.2.6.**

$$T_x \mathcal{H}^n = x^\perp \quad (\text{orthogonal au sens de } q).$$

**Preuve:** Par le cours de géométrie différentielle, parce que la sous-variété  $\mathcal{H}^n$  est définie par une submersion, on peut décrire le tangent par le noyau de la différentielle de la submersion. Ainsi,  $v$  est dans  $T_x \mathcal{H}^n$  si et seulement si  $d_x q \cdot v = 0$ . Or, par bilinéarité,  $d_x q \cdot v = 2x \cdot v$ .  $\square$

On dispose maintenant sur chaque espace tangent d'un produit scalaire, donc d'une norme. On construit une distance sur  $\mathcal{H}^n$  comme espace de longueur :

$$d'(p, q) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}} L(\gamma)$$

(on note  $d'$  cette distance en attendant de faire une analyse plus fine de la situation mais on montrera bientôt que  $d = d'$ ).

**Version projective.** Soit  $\pi$  la projection de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  (i.e  $\pi(x) = \mathbb{R}x$ ). On note  $\mathcal{K}^n = \pi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x) < 0\})$ . C'est un ouvert de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  (par définition de la topologie sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , la projection  $\pi$  est ouverte). On définit maintenant une distance sur  $\mathcal{K}^n$  de manière à forcer  $\pi$  à être une isométrie.

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-x \cdot y}{\sqrt{q(x)q(y)}}.$$

L'espace métrique  $(\mathcal{K}^n, \bar{d})$  est appelé le modèle projectif (ou modèle de Klein) de la géométrie hyperbolique. Une étude plus approfondie de ce modèle est rédigée comme exercice [ref](#).

### 1.2.4 Équivalence entre les modèles

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les différents modèles de la géométrie hyperbolique sont isométriques.

**Qu'est-ce qu'une isométrie ?** Vu la construction des différentes métriques, la question mérite d'être posée... Soit alors  $(X_1, d_1)$  et  $(X_2, d_2)$  deux espaces métriques construits comme précédemment ( $X_i$  est une variété différentiable et  $d_i = \inf_{\gamma} L(\gamma)$ ) et soit aussi  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  un difféomorphisme.

**Définition 1.2.7.** On dit que  $\varphi$  est une isométrie si, pour tout  $p$  et  $q$  dans  $X_1$ ,

$$d_2(\varphi(p), \varphi(q)) = d_1(p, q).$$

Cette définition n'est pas très facile à tester, en raison du fait que les distances ne sont pas données explicitement. Il est utile de se donner des conditions suffisantes plus maniables.

1. Le difféomorphisme  $\varphi$  envoie toute courbe  $\gamma$  sur une courbe de même longueur.
2. Ou encore : le difféomorphisme  $\varphi$  transforme l'élément de longueur de  $d_1$  en l'élément de longueur de  $d_2$ . Plus précisément, pour chaque  $x_1 \in X_1$ , on s'est donné un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_1}^1$  sur  $T_{x_1}X_1$  et, pour chaque  $x_2 \in X_2$ , un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_2}^2$  sur  $T_{x_2}X_2$ . Puis, on dit que  $\varphi$  envoie l'élément de longueur de  $X_1$  sur l'élément de longueur de  $X_2$  si, pour tout  $x_1 \in X_1$  et tous  $u, v \in T_{x_1}X_1$ ,

$$\langle d_{x_1}\varphi \cdot u, d_{x_1}\varphi \cdot v \rangle_{\varphi(x_1)}^2 = \langle u, v \rangle_{x_1}^1.$$

Alors  $\varphi$  est une isométrie car la formule de changement de variables dans le calcul de la longueur d'une courbe ramène au cas 1.

**Remarque** On montre en géométrie riemannienne que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

**Théorème 1.2.8.** Les trois espaces de longueur  $\mathcal{U}^n$ ,  $B^n$  et  $\mathcal{H}^n$  sont isométriques.

**Preuve:**  $B^n$  et  $(\mathcal{H}^n, d')$  sont isométriques.

Construisons tout d'abord une application entre  $B^n$  et  $\mathcal{H}^n$ . L'idée s'inspire de la projection stéréographique de la sphère vers le plan. Dans  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ , on dispose  $B^n$  dans l'hyperplan  $\mathbb{R}^n$  des premières coordonnées et l'hyperboloïde comme auparavant. Pour  $u \in B^n$ , on trace la droite affine passant par le point  $s$  de coordonnées  $(0, -1)$  (toujours compte tenu de la décomposition de  $\mathbb{R}^2$  précédente).

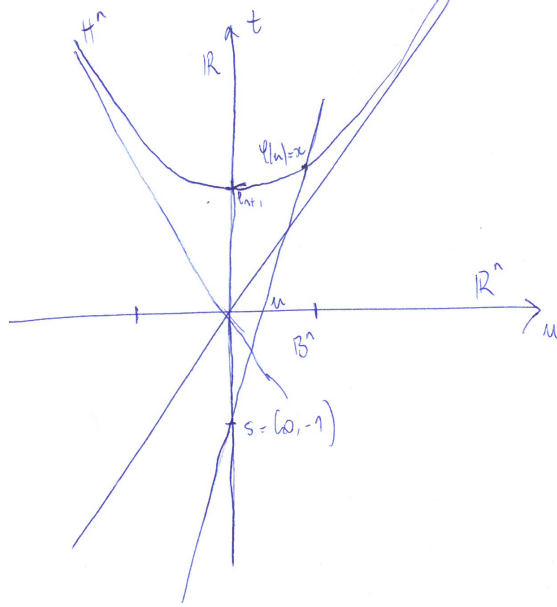


Figure 1.3: Une isométrie entre  $B^n$  et  $\mathcal{H}^n$

**Lemme 1.2.9.** La demi-droite affine  $\mathcal{D} = \{u + t(u - s), t > 0\}$  coupe l'hyperboloïde une et une seule fois.

**Preuve:** L'expression  $q(u + t(u - s))$  est un polynôme de degré 2, dont une étude standard amène au résultat. Pour cela, on utilise que  $0 \leq q(u) < 1$ , que  $s$  et  $u$  sont  $q$ -orthogonaux et que  $q(s) = 1$ .  $\square$

On note alors  $\varphi(u)$  le point de la droite passant par  $s$  et  $u$  sur  $\mathcal{H}^n$ . Il s'agit maintenant de trouver une expression explicite de  $\varphi$ .

Notons  $x = \varphi(u)$ . On sait que  $x$ ,  $u$  et  $s$  sont alignés; il existe donc  $\lambda > 0$  tel que  $x - s = \lambda(u - s)$ . D'où  $x + e_{n+1} = \lambda(u + e_{n+1})$  et  $x = \lambda u + (\lambda - 1)e_{n+1}$ . Puis, comme  $x \in \mathcal{H}^n$ , on a

$$-1 = q(x) = \lambda^2 |u|^2 - (\lambda - 1)^2$$

car  $u$  et  $e_{n+1}$  sont orthogonaux et que  $q(e_{n+1}) = -1$  (on a noté  $|u|$  la norme de  $u$  :  $q$  est le produit scalaire usuel en restriction à  $\mathbb{R}^n$ ). De ce calcul, on obtient  $\lambda = \frac{2}{1 - |u|^2}$  puis

$$x = \varphi(u) = \frac{2u}{1 - |u|^2} + \frac{1 + |u|^2}{1 - |u|^2} e_{n+1}.$$

On constate déjà que  $\varphi$  est lisse. Un raisonnement similaire permettrait d'expliciter son inverse  $\varphi^{-1}$  et de montrer que  $\varphi^{-1}$  est lisse (on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire euclidien).

Pour montrer que  $\varphi$  est une isométrie, on commence par différentier  $\varphi$  :

$$d_u \varphi \cdot v = \frac{2v}{1 - |u|^2} + 2u \frac{2 \langle u, v \rangle}{(1 - |u|^2)^2} + 2 \langle u, v \rangle \frac{2e_{n+1}}{(1 - |u|^2)^2}$$

$(\frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x})$ . Et ainsi

$$d_u \varphi \cdot v = \frac{2v}{1-|u|^2} + 4u \frac{\langle u, v \rangle}{(1-|u|^2)^2} + 4e_{n+1} \frac{\langle u, v \rangle}{(1-|u|^2)^2}.$$

On peut alors montrer que  $\varphi$  est une isométrie

$$\begin{aligned} d_u \varphi \cdot v \cdot d_u \varphi \cdot v &= \frac{4|v|^2}{(1-|u|^2)^2} + \frac{16\langle u, v \rangle^2}{(1-|u|^2)^3} + \frac{16|u|^2\langle u, v \rangle^2}{(1-|u|^2)^4} - \frac{16\langle u, v \rangle^2}{(1-|u|^2)^4} \\ &= \frac{4|v|^2}{(1-|u|^2)^2} + \frac{16\langle u, v \rangle^2}{(1-|u|^2)^4} [1-|u|^2+|u|^2-1] \\ &= \frac{4|v|^2}{(1-|u|^2)^2}, \end{aligned}$$

ce qui suffit, via l'identité de polarisation.

**$B^n$  et  $\mathcal{U}^n$  sont isométriques.**

Soit  $f$  l'inversion de centre  $-e_n$  et de rayon  $\sqrt{2}$  (**faire une référence**). On sait que  $f$  a une expression explicite :

$$f(x) = 2 \frac{x + e_n}{|x + e_n|^2} + e_n.$$

On vérifie alors facilement que  $f$  est un difféomorphisme de  $B^n$  sur  $\mathcal{U}^n$  et que  $f$  est une isométrie.  $\square$

*Notation:* On note  $\mathbb{H}^n$  l'un des modèles de la géométrie hyperbolique muni de sa métrique hyperbolique.

## 1.3 Géométrie des espaces hyperboliques

### 1.3.1 Le groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$

Le groupe des isométries hyperbolique est amené à jouer un rôle important dans la suite de ce cours. On rappelle en effet que la stratégie envisagée ici pour étudier la géométrie hyperbolique consiste bien souvent à simplifier une situation générique grâce à l'action du groupe des isométries.

Dans cette section, on utilisera le modèle de l'hyperboloïde de la géométrie hyperbolique, construit comme une des composantes connexes de la ligne de niveau -1 de  $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2$  pour  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Définition 1.3.1.** Soit

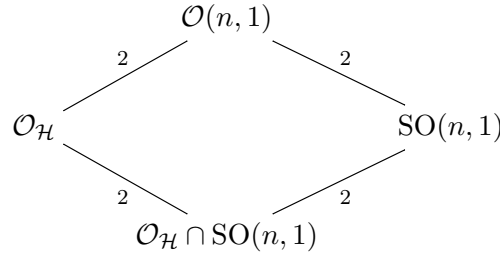
$$\mathcal{O}(n, 1) = \text{Isom}(q) = \left\{ A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \mid {}^t A \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\mathcal{O}_{\mathcal{H}} = \{ \varphi \in \mathcal{O}(n, 1), \varphi(\mathcal{H}^n) = \mathcal{H}^n \} = P\mathcal{O}(n, 1) := \mathcal{O}(n, 1) / \{ \pm 1 \}.$$



On dispose donc de 4 groupes



et on note  $\mathcal{O}^0(n, 1) = \mathcal{O}_H \cap \text{SO}(n, 1)$ .

**Théorème 1.3.2.**  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}_H$  et  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}^0(n, 1)$  ( $\text{Isom}^+$  désigne le groupe des isométries qui préservent l'orientation).

**Preuve:** On démontre déjà le lemme suivant (dont l'utilisation sera omniprésente dans la suite de ce cours)

**Lemme 1.3.3.**  $\mathcal{O}_H$  est transitif sur  $\mathbb{H}^n$ .

**Preuve:** Soit  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{H}^n$ . On rappelle que  $\mathcal{O}(n, 1)$  est transitif sur les droites négatives d'après le théorème de Witt. Il existe donc  $\varphi \in \mathcal{O}(n, 1)$  telle que  $\varphi(\mathbb{R}x) = \mathbb{R}y$  et puisque  $q(x) = q(y)$ , on sait que  $\varphi(x) = \pm y$ . Ainsi :

1. Si  $\varphi(x) = y$ , alors  $\varphi \in \mathcal{O}_H$  et c'est gagné.
2. Si  $\varphi(x) = -y$ , alors  $-\varphi$  convient.

□

Puis le lemme suivant qui exprime qu'une bijection qui préserve le produit scalaire est en fait un élément du groupe orthogonal.

**Lemme 1.3.4.** Soit  $(E^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et soit  $\varphi : E^n \rightarrow E^n$  une bijection telle que, pour tous  $x, y$  dans  $E^n$ ,

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Alors  $\varphi$  est linéaire (i.e  $\varphi \in O_n(\mathbb{R})$ ).

**Preuve:** Prenons  $x$  et  $y$  dans  $E^n$  et  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} & |\varphi(\lambda x + \mu y) - \lambda \varphi(x) - \mu \varphi(y)|^2 \\ &= |\varphi(\lambda x + \mu y)|^2 + |\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)|^2 - 2\langle \varphi(\lambda x + \mu y), \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y) \rangle \\ &= |\lambda x + \mu y|^2 + \lambda^2 |x|^2 + \mu^2 |y|^2 + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle - 2\lambda \langle \lambda x + \mu y, x \rangle - 2\mu \langle \lambda x + \mu y, y \rangle \end{aligned}$$

et on vérifie facilement que cette dernière quantité est nulle. □

Venons en maintenant à la preuve du théorème. Il bien clair qu'il suffit de démontrer la première assertion puisque  $\mathcal{O}^0(n, 1)$  est justement constitué des élément de  $\mathcal{O}_H$  qui préserve l'orientation. Par ailleurs, il est clair aussi que  $\mathcal{O}_H$  est contenu dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Inversement, prenons  $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Pour tous  $x, y$  de  $\mathcal{H}^n$ , on a donc, par définition

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$$

et il s'agit de montrer que  $f$  est linéaire (c'est-à-dire de montrer une version lorentzienne du lemme précédent). Puisque  $\mathcal{O}_H$  est transitif, quitte à composer par un élément de  $\mathcal{O}_H$ , on peut supposer que  $f$  fixe  $e_{n+1}$ .

Pour  $x = x' + te_{n+1}$ , on pose  $y = f(x) = y' + t'e_{n+1}$ . Or on a

$$t' = -f(x) \cdot e_{n+1} = -f(x) \cdot f(e_{n+1}) = -x \cdot e_{n+1} = t.$$

Il suit que  $f(x + te_{n+1}) = \varphi(x) + te_{n+1}$ . On constate que  $\varphi$  vérifie les hypothèses du lemme puisque, en se restreignant à  $\mathbb{R}^n$ ,  $q$  lui donne une structure euclidienne. On conclut que  $\varphi$  est linéaire et il en est de même pour  $f$ . □

**Remarque** Cette preuve montre aussi qu'une isométrie hyperbolique qui fixe un point est (conjuguée à) une isométrie euclidienne.

Nous montrons enfin que ce groupe d'isométries est isomorphe au groupe de Möbius, rencontré au début de ce chapitre.

**Théorème 1.3.5.**

$$\text{Isom}(B^n) = \text{Mob}(B^n) = \text{Mob}(\mathbb{S}^{n-1}) = \text{Mob}(\mathcal{U}^n) = \text{Isom}(\mathcal{U}^n).$$

**Preuve:** Les deux inégalités centrales ont été expliquées en [ref](#) et proviennent de l'existence d'une "extension de Poincaré". Les deux inégalités restantes se prouvent de la même manière et on ne s'occupe que de la première.

Soit dans un premier temps  $\phi \in \text{Mob}(B^n)$  et montrons que  $\phi$  est une isométrie hyperbolique. On sait [ref](#) que  $\phi$  est une composition de transformations orthogonales et d'inversions dans des sphères  $S(a, r)$  orthogonales à  $\mathbb{S}^{n-1}$ . On utilise les formules pour la distance hyperbolique de [ref](#) :

$$\cos d(\phi(x), \phi(y)) = 1 + \frac{2|\phi(x) - \phi(y)|^2}{(1 - |\phi(x)|^2)(1 - |\phi(y)|^2)}.$$

1. Si  $\phi$  est une transformation orthogonale, on a déjà remarqué que c'est aussi une isométrie hyperbolique et la formule ci-dessus permet de s'en apercevoir directement.
2. Si  $\phi$  est une inversion dans  $S(a, r)$ , il faut faire un peu de calcul. On sait ([ref](#)) que

$$|\phi(x) - \phi(y)|^2 = \frac{r^4 |x - y|^2}{|x - y|^2 |y - a|^2}$$

et on connaît aussi une expression explicite de  $\phi$  :

$$\phi(x) = a + \frac{r^2}{|x - a|^2}(x - a).$$

D'où,

$$|\phi(x)|^2 = |a|^2 + \frac{2r^2}{|x - a|^2} \langle a, x - a \rangle + \frac{r^4}{|x - a|^2}$$

puis

$$\begin{aligned} |\phi(x)|^2 - 1 &= |a|^2 - 1 + \frac{2r^2}{|x - a|^2} \langle a, x - a \rangle + \frac{r^4}{|x - a|^2} \\ &= \frac{(|a|^2 - 1)|x - a|^2 + 2r^2 \langle a, x - a \rangle + r^4}{|x - a|^2} \\ &= \frac{r^2 \left( |x - a|^2 + 2 \langle a, x - a \rangle + |a|^2 - 1 \right)}{|x - a|^2} \end{aligned}$$

puisque  $r^2 = |a|^2 - 1$  car  $S(a, r)$  et  $\mathbb{S}^{n-1}$  sont orthogonales. On trouve enfin, en constatant que  $|x|^2 = |a + x - a|^2 = |x - a|^2 + 2\langle a, x - a \rangle + |a|^2$ ,

$$|\phi(x)|^2 - 1 = \frac{r^2 (|x|^2 - 1)}{|x - a|^2},$$

ce qui permet de conclure directement.

Inversement, soit  $\phi$  une isométrie hyperbolique. La première étape consiste à se ramener au cas où  $\phi$  fixe un point.

**Lemme 1.3.6.** *Soit  $b \in B^n$ . Il existe une transformation de Möbius qui envoie 0 sur  $b$ .*

**Preuve:** Soit  $a \notin B^n$ ,  $S(a, r)$  une sphère orthogonale à  $\mathbb{S}^{n-1}$  et  $\sigma_a$  la réflexion dans la sphère  $S(a, r)$  (on ne note pas  $\sigma_{a,r}$  car  $r^2 = |a|^2 - 1$  donc  $a$  détermine  $r$ ). Soit encore  $\rho_a$  la réflexion dans l'hyperplan vectoriel dont  $a$  est un vecteur normal. On définit  $a^*$  par  $a^* = \frac{a}{|a|^2}$ . Un calcul direct donne

$$\sigma_a \rho_a(x) = \frac{(|a|^2 - 1)x + (|x|^2 + 2\langle x, a^* \rangle + 1)a}{|x + a|^2}.$$

(utiliser la décomposition  $x = \langle x, a \rangle a^* + x - \langle x, a \rangle a^*$ ). En particulier, on constate que  $\sigma_a \rho_a(0) = a^*$ . Ainsi, pour  $b \in B^n$ , il suffit de considérer  $\tau_b = \sigma_{b^*} \rho_{b^*}$ .  $\square$

Revenons au théorème et posons  $\psi(x) = \tau_{\phi^{-1}(0)}\phi(x)$ . C'est une isométrie hyperbolique car les applications  $\tau_b$  sont des compositions d'inversions (donc une isométrie d'après la première partie de la preuve). De plus,  $\psi$  fixe maintenant le point 0. C'est donc une transformation orthogonale, donc en particulier Möbius.  $\square$

**Définition 1.3.7.** *Les applications  $\tau_b$  pour  $b \in B^n$  construites au cours de la preuve précédente sont appelées des translations hyperboliques.*

### 1.3.2 Distances hyperboliques et géodésiques

Rappelons que la distance hyperbolique est construite comme l'infimum des longueurs de courbes qui relient deux points donnés. Nous montrons dans ce paragraphe que cet infimum est en fait un minimum. Les courbes qui réalisent ce minimum sont appelées des géodésiques (globalement minimisantes). Les géodésiques sont donc les courbes de plus court chemin. Notre objectif est d'en donner une description géométrique dans chacun des modèles de la géométrie hyperbolique. Pour cela, nous avons besoin de formules explicites pour la distance hyperbolique.

Commençons par une formule qui donne la distance à l'origine dans la boule, que l'on propagera ensuite à tous les points et dans les autres modèles avec les isométries.

**Lemme 1.3.8.** *Pour  $u \in B^n$ ,  $d(0, u) = 2 \arctan h(|u|)$  et la distance est réalisée par une courbe dont le support est un segment euclidien.*

**Preuve:** Comme (presque) toujours dans la suite, on commence par faire agir le groupe et puisque  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ , on peut supposer que  $u = ae_1$  avec  $a \geq 0$ . Soit alors  $c : [0, 1] \rightarrow B^n$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux qui joint 0 à  $u$ .

$$L(c) = \int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1 - |c(t)|^2} dt.$$

Or

$$|c'(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n c'_i(t)^2} \geq |c'_1(t)| \quad \text{et} \quad |c(t)|^2 = \sum_{i=1}^n c'_i(t)^2 \geq |c_1(t)|^2.$$

Il suit que

$$L(c) \geq \int_0^1 \frac{2|c'_1(t)|}{1-c_1(t)^2} dt \geq \left| \int_0^1 \frac{2c'(t)}{1-c(t)^2} dt \right| = 2 \operatorname{arctan} \operatorname{hl}(c_1) \geq 2 \operatorname{arctan} h|u|$$

avec égalité si et seulement si les majorations de  $|c'(t)|$  et  $|c(t)|^2$  sont exactes et si  $2 \operatorname{arctan} \operatorname{hl}(c_1) = 2 \operatorname{arctan} h|u|$ , c'est-à-dire si et seulement si, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$c_2(t) = \dots = c_n(t) = 0 \quad \text{et} \quad c'_1(t) > 0.$$

□

Une des conséquence de ce lemme est la comparaison des deux distances de l'hyperboloïde :

**Proposition 1.3.9.** *On dispose de deux distances dans  $\mathcal{H}^n$  :*

- $d$  définie par  $\cosh d(x, y) = -x \cdot y$  et
- $d'$  définie par  $d'(x, y) = \inf_{\gamma \in C_{p,q}} L(\gamma)$ .

Alors  $d = d'$ .

**Preuve:** On a vu que  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}} = \operatorname{Isom} d$ . Il est clair aussi que  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}} \subset \operatorname{Isom} d'$  car  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$  préserve l'élément de longueur. Par transitivité, on peut donc supposer qu'un des points est  $e_{n+1}$  (par exemple  $y = e_{n+1}$ ). On rappelle encore que

$$\begin{aligned} \varphi : B^n &\longrightarrow \mathcal{H}^n \\ u &\longmapsto \frac{2u}{1-|u|^2} + \frac{1+|u|^2}{1-|u|^2} e_{n+1} \end{aligned}$$

est une isométrie pour  $d'$ . L'inverse se calcule facilement et on trouve

$$\varphi^{-1}(x) = u = \frac{x'}{1+t}$$

si  $x = (x, t) \in \mathcal{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Le lemme précédent nous donne

$$\tanh \frac{1}{2} d(0, u) = |u| = \frac{|x'|}{1+t}$$

puis

$$\tanh^2 \frac{1}{2} d(0, u) = \frac{|x'|^2}{(1+t)^2} = \frac{t^2 - 1}{(1+t)^2} = \frac{t-1}{t+1}.$$

La deuxième égalité vient du fait que  $-1 = q(x) = |x'|^2 - t^2$ . Mais par ailleurs,

$$\tanh^2 \left( \frac{X}{2} \right) = \frac{\cosh X - 1}{\cosh X + 1}$$

Ainsi

$$t = \cosh d(0, u) = \cosh d'(e_{n+1}, x)$$

car  $\varphi$  est une isométrie. Or  $t = -e_{n+1} \cdot x$ . Il suit que  $\cosh d'(e_{n+1}, x) = -x \cdot e_{n+1}$ . Donc  $d = d'$ . □

À l'aide de cette proposition, on obtient un formulaire pour les distances hyperboliques de chaque modèle (voir l'exercice [ref](#)).

**Corollaire 1.3.10.** *On note  $|\cdot|$  la distance euclidienne.*

1. Pour  $u$  et  $v$  dans  $B^n$ ,

$$\tanh \frac{d(u, v)}{2} = \frac{|u - v|}{\left(1 - 2\langle u, v \rangle + |u|^2 |v|^2\right)^{1/2}}$$

et

$$\cosh d(u, v) = 1 + \frac{|u - v|^2}{\left(1 - |u|^2\right) \left(1 - |v|^2\right)}.$$

2. Pour  $x = (x', t)$  et  $y = (y', s)$  dans  $\mathcal{U}^n$  (i.e  $t, s > 0$ ),

$$\tanh \frac{d(u, v)}{2} = \left( \frac{|x' - y'|^2 + (t - s)^2}{|x' - y'|^2 + (t + s)^2} \right)^{1/2}$$

et

$$\cosh d(u, v) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2st}$$

Cherchons maintenant les courbes qui réalisent ces distances.

**Définition 1.3.11.** *Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux parcourue à vitesse 1.*

1. On dit que  $\gamma$  est une géodésique si, pour tout  $p = \gamma(t_0) \in \text{Im}(\gamma)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, si  $|t - t_0| < \varepsilon$ , alors

$$d(\gamma(t), p) = L(\gamma|_{[t, t_0]}) = |t - t_0|$$

(i.e  $\gamma$  minimise localement les distances).

2. On dit que  $\gamma$  est une géodésique (globalement) minimisante si, pour tous  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|.$$

Montrons tout d'abord un théorème d'existence et d'unicité de géodésiques minimisantes

**Théorème 1.3.12.** 1. *L'espace métrique  $\mathbb{H}^n$  est complet.*

2. *Pour  $p, q$  dans  $\mathbb{H}^n$ , il existe une unique courbe de longueur minimale de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\gamma : [0, d = d(p, q)] \rightarrow \mathbb{H}^n$  telle que  $\|\gamma'(t)\| = 1$  pour tout  $t$ ,  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(d) = q$ .*

3. *Si  $p \neq q$ , la courbe  $\gamma$  du 2. se prolonge en une unique géodésique minimisante  $\gamma : ]-\infty, +\infty[ \rightarrow \mathbb{H}^n$ .*

**Remarque** On montre en géométrie riemannienne que le point 2. est toujours vrai localement et que le fait de pouvoir prolonger les géodésiques est en fait équivalent à la complétude (théorème de Hopf-Rinow). Le point 3. est faux en général, même pour des variétés complètes, car les géodésiques peuvent cesser d'être minimisante (par exemple sur la sphère).

**Preuve:** Toutes ces propriétés sont invariantes par isométrie, on a donc le choix du modèle; on prend celui de la boule.

1. D'après le lemme du début de cette section, les boules fermées sont compactes car

$$B_{\text{hyp}}(0, R) = B_{\text{eucl}}(0, \tanh \frac{R}{2})$$

et ce qui est vrai en 0 est vrai partout par transitivité du groupe. Cette propriété est équivalente à la complétude.

2. C'est essentiellement ce qui dit le lemme.
3. On peut supposer  $p = 0$  et  $q = ae_1$  (on peut amener le premier point sur 0, puis, par son stabilisateur qui est  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , envoyer le second sur l'axe  $\mathbb{R}e_1$ ). On pose alors  $\gamma(t) = \tanh\left(\frac{t}{2}\right) e_1$ . Vérifions que  $\gamma$  convient.

$$\gamma'(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh\left(\frac{t}{2}\right) \right) e_1$$

donc

$$\|\gamma'(t)\|_{\text{hyp}} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1 - \tanh^2 \frac{t}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{t}{2}} = 1.$$

Et, en utilisant les formules pour la distance,

$$\begin{aligned} \tanh^2 \left( \frac{d(\gamma(s), \gamma(t))}{2} \right) &= \frac{|\gamma(s) - \gamma(t)|}{1 - 2 \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \tanh\left(\frac{t}{2}\right) + \tanh^2\left(\frac{s}{2}\right) \tanh^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\left( \tanh\left(\frac{s}{2}\right) - \tanh\left(\frac{t}{2}\right) \right)^2}{\left( 1 - \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \tanh\left(\frac{t}{2}\right) \right)^2} \\ &= \tanh^2 \left| \frac{s}{2} - \frac{t}{2} \right| \end{aligned}$$

Donc  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ .

□

### Description des géodésiques

On conclut ce paragraphe avec une description géométrique des géodésiques (complètes).

**Théorème 1.3.13.** 1. Pour l'hyperboloïde  $\mathcal{H}^n$ , les géodésiques sont les intersections avec  $\mathcal{H}^n$  des plans vectoriels, i.e  $\mathcal{H}^n \cap (\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)$  pour  $x \neq y$ ,  $x, y$  dans  $\mathcal{H}^n$ .

2. Pour la boule de Poincaré  $B^n$ , ce sont des arcs de cercles orthogonaux au bord et des diamètres de  $B^n$ .

3. Pour le demi-espace  $\mathcal{U}^n$ , ce sont des droites verticales ou des demi cercles orthogonaux à  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

4. Pour le modèle de Klein, ce sont des droites projectives.

**Remarque** La preuve consiste à exploiter adroitement les trois idées suivantes :

1. On a déjà montré que les diamètres de  $B^n$  sont des géodésiques.
2. Le groupe d'isométries  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  envoie géodésiques sur géodésiques.

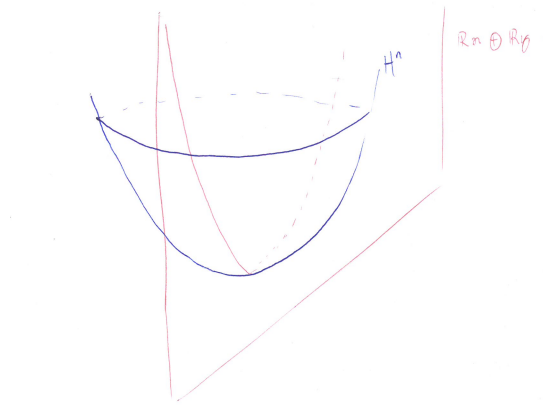


Figure 1.4: Les géodésiques de l'hyperboloïde

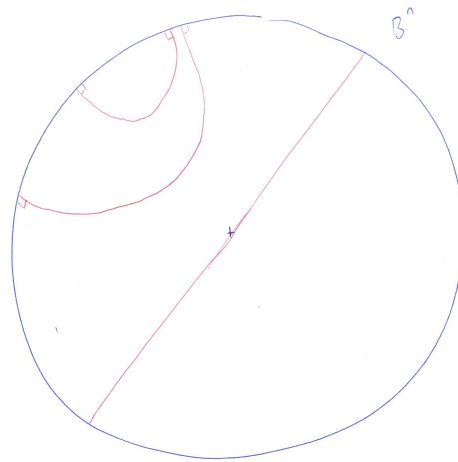


Figure 1.5: Les géodésiques de la boule de Poincaré

3. Isom = Mob.

**Preuve:** 1. Prenons  $x = e_{n+1}$  et  $y$  quelconque. La courbe  $\mathcal{H}^n \cap (\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y)$  se transporte avec l'isométrie entre les deux modèles sur un diamètre de la boule; c'est donc une géodésique. Si le point  $x$  est maintenant quelconque lui-aussi, on fait agir le groupe :

**Lemme 1.3.14.** *Le groupe d'isométrie  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$  est transitif sur l'ensemble des plans qui contiennent un vecteur  $x$  tel que  $q(x) = -1$ .*

**Preuve:** Soit  $V$  un tel plan. On note  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e_n \oplus \mathbb{R}e_{n+1}$ . On veut montrer qu'il existe  $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{H}}$  tel que  $A(\mathbb{R}^2) = V$ . On choisit une base  $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  telle que

- $\{u_n, u_{n+1}\}$  est une base de  $V$ .
- $q(u_{n+1}) < 0$  (c'est possible car  $V$  contient un tel vecteur)
- La dernière coordonnée de  $u_{n+1}$  est positive (quitte à changer  $u_{n+1}$  en  $-u_{n+1}$ , ce qui ne change pas le signe de  $q(u_{n+1})$ ).

Puis on applique à la base  $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$  un procédé de Gram-Schmidt pour la

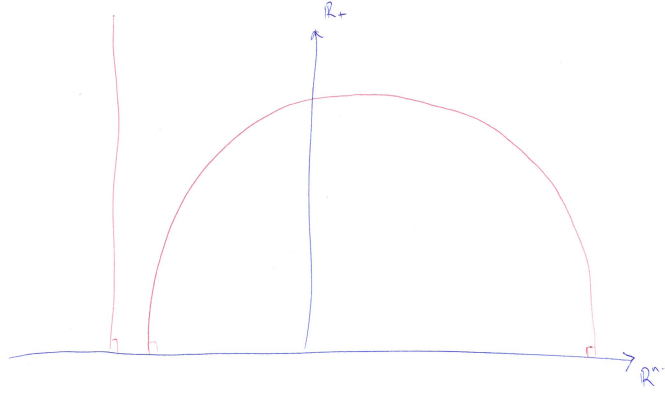


Figure 1.6: Les géodésiques du demi-espace

forme quadratique  $q$  (i.e on  $q$ -orthonormalise la base). En effet, on pose

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{-u_{n+1} \cdot u_{n+1}}}$$

de sorte que  $q(w_{n+1}) = -1$ . Puis soit  $v_n = u_n + (u_n \cdot w_{n+1}) w_{n+1}$ . Alors  $v_n \neq 0$  et, puisque  $v_n \cdot w_{n+1} = u_n \cdot w_{n+1} - u_n \cdot w_{n+1} = 0$ , on sait (par Sylvester) que  $q(v_n) > 0$ . Et donc on peut poser

$$w_n = \frac{v_n}{\sqrt{v_n \cdot v_n}}.$$

Et on continue...

On note que  $V = \mathbb{R}w_{n+1} \oplus \mathbb{R}w_n$ . La matrice constituée des vecteurs  $w_i$  en colonnes est dans  $\mathcal{O}(n, 1)$  car elle envoie la base canonique qui est Lorentz-orthonormée sur la base des  $w_i$  qui est aussi Lorentz-orthonormée. De plus, elle préserve l'hyperboloïde car la dernière coordonnée de  $w_{n+1}$  est positive.  $\square$

De ce lemme, on déduit que toute courbe qui est l'intersection de d'un plan avec  $\mathcal{H}^n$  est géodésique. Pour la réciproque, il existe deux stratégies : la première est rédigée sous forme d'exercice [ref](#). La seconde consiste à utiliser un argument riemannien : une géodésique  $\gamma$  est uniquement déterminée par  $\gamma(t_0)$  et  $\gamma'(t_0)$  : elle est donc contenue dans le plan engendré par ces deux vecteurs.

**Remarque** Les géodésiques de  $\mathcal{H}^n$  sont des branches d'hyperboloïde, elles sont paramétrées par  $\gamma(t) = \cosh tx + \sinh tX$  où  $\gamma(0) = x$  ( $x \cdot x = -1$ ) et  $\gamma'(0) = X$ .

4. Pour le modèle de Klein  $\mathcal{K}^n$ , c'est maintenant évident puisque la projection projective envoie plans sur droites
2. Cela provient de la combinaison des deux faits
  - $\text{Isom}(B^n) = \text{Mob}(B^n)$  et
  - $\text{Mob}(B^n)$  est transitif sur les droites et cercles orthogonaux au bord.
3. Il suffit d'utiliser le fait que l'isométrie entre  $\mathcal{U}^n$  et  $B^n$  est une inversion.

$\square$



### 1.3.3 Bord à l'infini de l'espace hyperbolique

À revoir

Soit  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R})$  la projection canonique. On rappelle que  $\mathcal{K}^n = \pi(\{q < 0\})$ .

**Définition 1.3.15.** Le bord de  $\mathbb{H}^n$ , noté  $\partial\mathbb{H}^n$  est  $\pi(\{q = 0\})$ .

**Proposition 1.3.16.** 1. Le bord de  $\mathbb{H}^n$  est difféomorphe à une sphère euclidienne  $\mathbb{S}^{n-1}$  et  $\mathbb{H}^n \cup \mathbb{S}^{n-1}$  est difféomorphe à une boule fermée, dans chacun des modèles.

2. Toute isométrie de  $\mathbb{H}^n$  s'étend continûment à  $\partial\mathbb{H}^n$ .

3. Pour  $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  (étendue au bord en  $\bar{f}$ ), si  $\bar{f}$  agit trivialement sur le bord, alors  $f$  est triviale.

**Preuve:** 1. C'est un point subtil et il faut bien prendre soin de préciser les différentes topologies. □

**Remarque** Sur le modèle du 1/2 plan.

La géométrie qui se dépose au bord est la géométrie conforme.

### 1.3.4 Classification individuelle des isométries

**Théorème 1.3.17.** Soit  $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Alors, on est dans un et un seul des cas suivants :

1.  $f$  admet (au moins) un point fixe dans  $\mathbb{H}^n$  :  $f$  est dite de type **elliptique**.
2.  $f$  admet un unique point fixe qui au bord de  $\mathbb{H}^n$  :  $f$  est dite de type **parabolique**.
3.  $f$  n'a pas de point fixe dans  $\mathbb{H}^n$  et a exactement deux points fixes dans  $\partial\mathbb{H}^n$  :  $f$  est dite de type **hyperbolique** ou **loxodromique**.

**Preuve:** On procède en deux étapes :

**Étape 1 :**  $f$  admet toujours au moins un point fixe dans  $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ .

On pourrait appliquer directement le théorème de Brouwer (toute application continue de la boule dans la boule admet un point fixe) mais on préfère un raisonnement direct.

**Lemme 1.3.18.** Soit  $\varphi \in \mathcal{O}(n, 1)$ . Alors il existe une droite  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui est soit négative, soit isotrope et qui est stable par  $\varphi$ .

**Preuve:** On procède par récurrence sur  $n \geq 1$ .

- $n = 1$  :  $\mathbb{R}^{1,1}$  est un plan hyperbolique (au sens des espaces quadratiques) et on en connaît ses isométries : si elle est directe, alors

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

et la droite  $\mathbb{R}e_2$  est stable et négative. Si elle est indirecte, c'est une réflexion par rapport à une droite  $\Delta$ . donc  $\Delta$  et  $\Delta^\perp$  sont stables et l'une des deux est négative par Sylvester.

- Supposons le résultat vérifié pour toutes les dimensions inférieures à  $n - 1$ . Comme toute matrice réelle,  $\varphi$  admet une droite stable ou un plan stable. Supposons déjà que  $\varphi$  admette une droite stable  $\Delta$ . Si  $\Delta$  est négative ou nulle, c'est bon. On peut donc supposer que  $\Delta$  est positive. On a donc  $\mathbb{R}^{n,1} = \Delta \oplus \Delta^\perp$  et  $\Delta^\perp$  est stable. Par Sylvester,  $\Delta^\perp$  est de type  $(n - 1, 1)$ . On lui applique l'hypothèse de récurrence.

Supposons maintenant que  $\varphi$  admette un plan stable  $P$ . Alors,  $P$  ne peut être que de trois types : de type  $(+, +)$  (auquel cas son orthogonal est de signature  $(n - 2, 1)$  et on applique l'hypothèse de récurrence,  $(+, -)$  (auquel cas on est ramené à  $n = 1$ ) ou  $(0, +)$  (auquel cas le radical est stable). En effet, puisque l'indice de Witt est 1, les types  $(0, 0)$  et  $(0, -)$  sont impossibles.

□

**Étape 2 :** Si  $f$  fixe trois points distincts au bord de  $\mathbb{H}^n$ , alors  $f$  a des points fixes dans  $\mathbb{H}^n$ .

Soit donc  $\varphi \in \mathcal{O}(n, 1)$  qui admet trois droites isotropes stables par  $\varphi$  :  $\varphi(D_i) = D_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Soit  $W = \text{Vect}(D_1, D_2, D_3)$ . Alors  $W$  est de dimension 3 car il ne peut y avoir trois droites isotropes dans un plan d'un espace de Lorentz (voir plus haut, toujours car l'indice de Witt est 1). De plus  $\varphi$  induit une isométrie de  $W$  car les droites sont stables. Pour  $i \neq j$ ,  $\text{Vect}(D_i, D_j)$  est un plan  $(+, -)$  car il a deux droites isotropes. Posons  $\Delta_k = \mathbb{R}u_k = \text{Vect}(D_i, D_j)^\perp$  (l'orthogonal est bien de dimension 1 car  $\text{Vect}(D_i, D_j)$  est défini). On déduit du fait que  $W$  est de type  $(+, +, -)$  (seule possibilité pour avoir plus de deux droites isotropes), que  $q(u_k) = 1$ . Maintenant, on a  $D_3 = \text{Vect}(\Delta_1, \Delta_2)^\perp$  (en effet  $(\Delta_1, \Delta_2)^\perp = \Delta_1^\perp \cap \Delta_2^\perp = \text{Vect}(D_2, D_3) \cap \text{Vect}(D_1, D_3) = D_3$ ). De plus,  $D_3 \subset \text{Vect}(\Delta_1, \Delta_2)$  sinon  $W = \text{Vect}(\Delta_1, \Delta_2)$  serait  $(+, 0, -)$ . On en déduit que  $\varphi|_{\text{Vect}(\Delta_1, \Delta_2)}$  est une homothétie car elle a trois droites stables (et même  $\varphi = \pm \text{id}$  mais c'est inutile pour la suite). Donc  $\varphi$  fixe toutes les droites et en particulier les droites négatives.

□

**Remarque** Le type d'une isométrie ne dépend que de la classe de conjugaison. En effet, si on note  $\text{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n, f(x) = x\}$ , alors, pour  $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ ,

$$\text{Fix}(gfg^{-1}) = g(\text{Fix}(f)).$$

**Proposition 1.3.19.** *Il existe des isométries des trois types (si  $n \geq 2$ ).*

**Preuve:** • **elliptique** : dans le modèle de l'hyperboloïde, on prend  $\varphi \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et

$$f(x' + te_{n+1}) = \varphi(x') + te_{n+1}.$$

C'est une isométrie de  $\mathbb{H}^n$  qui fixe  $e_{n+1}$ .

**Remarque** On a déjà constaté que toute isométrie elliptique est conjuguée à une telle isométrie (car  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  est transitif).

- **parabolique** : dans le modèle du  $1/2$  espace, soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U}^n &\longrightarrow \mathcal{U}^n \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

avec  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  (i.e  $f$  est une translation le long d'une direction parallèle à l'hyperplan de bord). On vérifie facilement que  $f$  est une isométrie avec les formules pour la distance. Et  $\text{Fix}(f) = \{\infty\}$ . Plus généralement, si  $\varphi$  est une isométrie affine de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sans point fixe, on peut poser  $f(x' + x_n e_n) = \varphi(x') + x_n e_n$ .

- **hyperbolique** : dans le modèle du  $1/2$  espace et avec  $\lambda > 0$ , on pose

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U}^n &\longrightarrow \mathcal{U}^n \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}.$$

Alors  $\text{Fix}(f) = \{0, \infty\}$ . Plus généralement, si  $\varphi \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ , on prend  $f(x' + x_n e_n) = \lambda(\varphi(x') + x_n e_n)$ .

□

## 1.4 Quelques précisions supplémentaires en dimensions 2 et 3

### 1.4.1 Géométrie du plan hyperbolique

On se place dans le modèle du  $1/2$ -plan  $\mathcal{U}^2 = \mathbb{H}^2 = \{z = x + iy, y > 0\} \subset \mathbb{C}$ .

On considère le groupe de matrices

$$\text{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } ad - bc = 1 \right\}.$$

**Proposition 1.4.1.** *Le groupe  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  agit sur  $\mathbb{H}^2$  par*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*C'est une action par isométries, qui se factorise en une action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm I_2\}$ . Elle préserve l'orientation.*

**Preuve:** 1. Vérifions déjà que  $\mathbb{H}^2$  est stable. En effet,

$$\Im \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \Im z = \frac{\Im z}{|cz + d|^2} > 0.$$

2. Vérifions ensuite que c'est une action par isométries. Notons  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . On remarque que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{H}^2$  donc que  $d_z f \cdot u = f'(z)u$ . Par ailleurs, si  $u$  et  $v$  sont deux nombres complexes,  $\langle u, v \rangle = \Re(u\bar{v})$ . Ainsi

$$\langle d_z f \cdot u, d_z f \cdot v \rangle_{f(z)} = \frac{\Re(f'(z)u \overline{f'(z)v})}{(\Im f(z))^2} = \frac{u\bar{v}}{|cz + d|^4} \cdot \frac{|cz + d|^4}{\Im z} = \langle u, v \rangle_z.$$

3. Pour obtenir une action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , on constate que le sous-groupe  $\{\pm 1\}$  est le noyau de l'action et on applique le théorème de factorisation.
4. Toute application holomorphe préserve l'orientation (conditions de Cauchy-Riemann).

□

On veut maintenant montrer que  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  est exactement le groupe des isométries directes. Comme d'habitude, on commence par montrer que ce groupe est suffisamment transitif.

**Lemme 1.4.2.** *Le groupe  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  est transitif sur les droites et cercles orthogonaux au bord (i.e les géodésiques).*

**Preuve:** On cherche à tout ramener sur l'axe imaginaire. Si  $L$  est une droite verticale d'abscisse  $x_0$ , alors  $z \mapsto z - x_0$  convient. Si  $L$  est un cercle euclidien orthogonal à  $\mathbb{R}$  et qui rencontre l'axe réel en  $\alpha$ , alors  $z \mapsto \frac{-1}{z - \alpha} + \beta$  avec  $\beta$  à ajuster convient.

□

**Théorème 1.4.3.** *Le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  est engendré par les homographies et l'application  $z \mapsto -\bar{z}$ . Il est isomorphe à*

$$\text{PSL}_2^*(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } ad - bc = \pm 1 \right\} / \{\pm I_2\}.$$

*Le sous-groupe  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  est d'indice 2 et constitue les transformations qui préservent l'orientation.*

**Preuve:** Soit  $\phi$  une isométrie de  $\mathbb{H}^2$ . On note  $I$  l'axe imaginaire. Puisque  $\phi$  envoie géodésiques sur géodésiques,  $\phi(I)$  est une géodésique. D'après le lemme précédent, il existe  $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  tel que  $g$  envoie  $\phi(I)$  sur  $I$ . On peut donc supposer que  $\phi$  fixe globalement  $I$ . Puis, quitte à appliquer une transformation de la forme  $z \mapsto kz$ , on peut supposer que  $\phi$  fixe  $i \in I$ . Enfin, en appliquant encore au besoin  $z \mapsto \frac{-1}{z}$ , on peut supposer que  $\phi$  stabilise les deux demi axes  $(i\infty)$  et  $(0, i)$ . Puisque  $\phi$  est une isométrie, on conclut que  $\phi$  fixe chaque point de  $I$ . À partir de maintenant, il s'agit de montrer que  $\phi$  est soit l'identité, soit la réflexion par rapport à  $I$ . Posons  $z = x + iy$  et  $\phi(z) = u + iv$ . Pour  $t > 0$ , on a

$$d(z, it) = d(\phi(z), \phi(it)) = d(u + iv, it).$$

Puis, en passant au cosh,

$$1 + \frac{|z - it|^2}{2yt} = 1 + \frac{|u + i(v - t)|^2}{2vt}.$$

D'où,

$$\frac{x^2 + (y - t)^2}{y} = \frac{u^2 + (v - t)^2}{v}$$

et

$$x^2 + (y - t)^2 v = u^2 + (v - t)^2 y$$

ou encore

$$\frac{x^2 + (y - t)^2 v}{t^2} = \frac{u^2 + (v - t)^2 y}{t^2}.$$

Faisant tendre  $t$  vers  $\infty$ , il reste  $v = y$ , puis facilement,  $x^2 = u^2$ . On a donc  $\phi(z) = z$  ou  $\phi(z) = -\bar{z}$ . Les isométries sont lisses (en particulier continues) donc une des deux formules est vraie pour tout  $z$ .  $\square$

**Remarque** On obtient en particulier un isomorphisme de groupe (dit isomorphisme exceptionnel)  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}^0(2, 1)$ .

Le lemme suivant sera souvent utilisé par la suite.

**Lemme 1.4.4.** *Le groupe  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  est 2 fois transitif sur le bord.*

**Preuve:** On utilise le modèle du  $1/2$  plan, pour lequel le bord est la droite projective réel. L'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur le bord est l'action projective usuelle. Soit alors  $x_1$  et  $x_2$  deux points distincts du bord  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . On peut connecter ces deux points à 0 et  $\infty$  par

$$f(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2} \cdot \frac{1}{x_1 - x_2}.$$

$\square$

### Retour à la classification des isométries

Voici un autre critère de classification des isométries selon les trois types qui utilise la représentation des isométries sous forme de matrice de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.4.5.** *Soit  $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ ,  $\gamma \neq 1$ . Alors,*

- *Si  $\mathrm{trace}^2 \gamma < 4$ , alors  $\gamma$  est elliptique.*
- *Si  $\mathrm{trace}^2 \gamma = 4$ , alors  $\gamma$  est parabolique.*
- *Si  $\mathrm{trace}^2 \gamma > 4$ , alors  $\gamma$  est hyperbolique.*

Noter que  $\gamma$  admet deux représentants dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  :  $A$  et  $-A$  et on pose

$$\mathrm{trace}^2 \gamma = (\mathrm{trace} A)^2$$

( $\mathrm{trace} \gamma$  n'est pas définie). On aurait aussi pu discuter selon  $|\mathrm{trace} \gamma|$ .

**Preuve:** C'est élémentaire, on pose

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

L'équation  $\gamma(z) = z$  est équivalente à  $cz^2 + (d - a)z - b = 0$  dont le discriminant est  $\Delta = \mathrm{trace}^2 \gamma - 4$ .  $\square$

### Classes de conjugaison

Une des applications possibles de la géométrie hyperbolique est de trouver les classes de conjugaison dans le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.4.6.** *Soit  $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ,  $\gamma \neq 1$ .*

1. *Si  $|\mathrm{trace} \gamma| < 2$ , alors  $\gamma$  est conjuguée dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  à  $\gamma_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$  (géométriquement, une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $z = i$ . Et  $\gamma_\theta$  est conjugué à  $\gamma_{\theta'}$  si et seulement si  $\theta = \theta' [2\pi]$ .*
2. *Si  $|\mathrm{trace} \gamma| = 2$ , alors  $\gamma$  est conjuguée dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  à  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .*
3. *Si  $|\mathrm{trace} \gamma| > 2$ , alors  $\gamma$  est conjuguée dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  à  $\gamma_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \neq 1$ . Et  $\gamma_\lambda$  est conjuguée à  $\gamma_\mu$  si et seulement si  $\lambda = \mu$  ou  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ .*

**Preuve:** 1. Le résultat est déjà connu : conjuguer sert à changer le point fixé puis  $\mathrm{Stab}_i(\mathrm{SL}_2) = \mathrm{SO}_2$  et donc  $\mathrm{Stab}_i(\mathrm{PSL}_2) = \mathrm{PSO}_2 \simeq \mathrm{SO}_2$ .

2. On peut supposer  $\gamma(\infty) = \infty$  dans le modèle du  $1/2$  plan. Alors  $\gamma(z) = z + b$  car  $|\mathrm{trace} \gamma| = 2$ . Si  $b > 0$ , soit  $\psi(z) = \frac{z}{b}$ ; on a  $\psi \circ \gamma \circ \psi^{-1}(z) = z + 1$ . Si  $b < 0$ , alors  $\psi(z) = \frac{z}{-b}$  convient. On note maintenant  $t^\pm(z) = z \mapsto z \pm 1$  et on montre (par l'absurde) que  $t^+$  et  $t^-$  ne sont pas conjuguées. Supposons donc qu'il existe  $\psi$  telle que  $\psi t^+ \psi^{-1} = t^-$ . Alors  $\psi$  fixe nécessairement l'infini et  $\psi(z) = az + b$  avec  $a > 0$ . Un calcul explicite donne  $\psi \circ \gamma \circ \psi^{-1}(z) = z + a$ .

**Remarque** Les deux applications paraboliques  $t^+$  et  $t^-$  sont en fait conjuguées dans  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$  par  $\sigma(z) = -\bar{z}$ .

3. On peut supposer que  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma(\infty) = \infty$  (lemme 1.4.4). Alors  $\gamma(z) = \lambda z$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$ . Si  $\gamma_\lambda$  est conjuguée à  $\gamma_\mu$ , alors

$$\text{trace}^2 \gamma_\lambda = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \mu + \frac{1}{\mu} + 2 = \text{trace}^2 \gamma_\mu.$$

Soit  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ . On vérifie bien que, si  $y^2 > 4$ , alors  $y$  a deux antécédents par  $f$ . On en déduit bien que  $\lambda = \mu$  ou  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ . D'ailleurs,  $\gamma_\lambda$  et  $\gamma_{\frac{1}{\lambda}}$  sont conjuguées par  $\sigma(z) = -\frac{1}{z}$ . □

On montre enfin un dernier théorème de classification qui utilise comme critère la distance de déplacement.

**Définition 1.4.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $\gamma \in \text{Isom}(X)$ . On appelle distance de déplacement et on note  $d_\gamma$  la quantité

$$d_\gamma = \inf_{x \in X} d(x, \gamma x).$$

Par exemple, si  $\gamma$  a un point fixe, alors  $d_\gamma = 0$ .  
Voilà le critère de classification.

**Proposition 1.4.8.** Soit  $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ . Alors

1. Si  $d_\gamma = 0$  et si  $d_\gamma$  est atteint, alors  $\gamma$  est elliptique.
2. Si  $d_\gamma = 0$  mais que  $d_\gamma$  n'est pas atteint, alors  $\gamma$  est parabolique.
3. Si  $d_\gamma > 0$ , alors  $\gamma$  est hyperbolique.

Pour démontrer ce critère (en particulier que  $d_\gamma = 0$  uniquement dans le cas parabolique ou elliptique), on utilise les informations suivantes sur les transformations hyperboliques.

**Proposition 1.4.9.** Soit  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  une isométrie hyperbolique. Alors,

1. Il existe une unique géodésique  $A$  fixe par  $\gamma$  et on dit que  $A$  est l'axe de la transformation hyperbolique  $\gamma$ .
2. Plus les points sont loin de l'axe, plus ils sont déplacés par  $\gamma$ . Précisément, pour  $z \in \mathbb{H}^2$ ,

$$\sinh \left( \frac{d_\gamma}{2} \right) \cosh d(z, A) = \sinh \left( \frac{d(z, \gamma z)}{2} \right).$$

3. En particulier,  $d_\gamma > 0$  et  $d(z, \gamma z) = d_\gamma$  si et seulement si  $z \in A$ .

Montrons déjà cette seconde proposition.

**Preuve:** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  les points fixes de  $\gamma$  et soit  $A = (\alpha, \beta)$  la géodésique d'extrémités  $\alpha$  et  $\beta$ . Alors  $A$  est fixe par  $\gamma$  puisqu'une géodésique est uniquement déterminée par ses deux extrémités. Soit maintenant  $B$  une autre géodésique fixe par  $\gamma$ . Alors  $B(\infty)$  et  $B(-\infty)$  sont fixes par  $\gamma^2$  et on sait que les points fixes de  $\gamma^2$  sont exactement  $\alpha$  et  $\beta$ . Donc  $A = B$  comme lieux géométriques.

Pour la formule de la distance à l'axe, on peut supposer que  $\gamma(z) = \lambda z$ , quitte à conjuguer, ce qui ne change pas les données du problème. L'axe de  $\gamma$  est donc la demi-droite de  $\mathbb{H}^2$ ,  $\Re z = 0$ . On utilise la formule de la distance

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\Im z \Im w}.$$

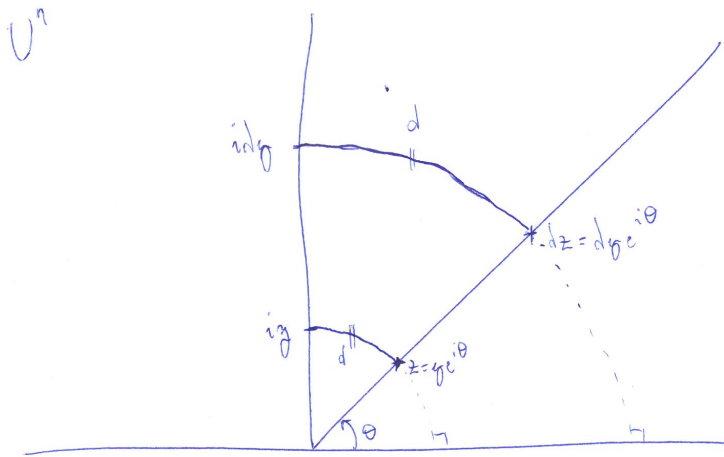


Figure 1.7: La situation

Soit donc  $z \in \mathbb{H}^2$ ; il existe un unique angle  $\theta \in ]0, \pi[$  tel que  $z$  est sur la demi-droite qui forme un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses, disons  $z = ye^{i\theta}$ . Alors

$$\cosh d(z, A) = \cosh d(ye^{i\theta}, iy).$$

En effet la droite d'angle  $\theta$  et la géodésique passant par  $iy$  et  $ye^{i\theta}$  sont orthogonales (un cercle est orthogonal à chacun de ses rayons). Donc le point  $iy$  est bien le projeté de  $ye^{i\theta}$  sur l'axe de  $\gamma$ . Puis

$$\begin{aligned} \cosh d(z, A) &= 1 + \frac{|ye^{i\theta} - iy|^2}{2yy \sin \theta} \\ &= 1 + \frac{|e^{i\theta} - i|^2}{2 \sin \theta} \\ &= 1 + \frac{2 - 2\Re(ie^{-i\theta})}{2 \sin \theta} \\ &= 1 + \frac{1 - \Re(e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)})}{\sin \theta} \\ &= 1 + \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin \theta} \\ &= 1 + \frac{1 - \sin \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Gardons ça en tête. On vérifie ensuite, en utilisant la même formule pour la distance que

$$\cosh d(z, \lambda z) = 1 + \frac{(\lambda - 1)^2}{2 \sin^2 \theta}.$$

On constate déjà que  $\cosh d(z, \lambda z)$  est minimale lorsque  $\sin \theta$  est maximal, c'est-à-dire  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , i.e  $z$  est sur l'axe ! Ainsi  $d_\gamma = l = \ln \lambda$  (la distance hyperbolique entre  $i$  et  $\lambda i$ ). On obtient aussi en particulier que

$$\cosh d_\gamma = 1 + \frac{(\lambda - 1)^2}{2}.$$

Enfin, en utilisant l'identité  $\cosh X = 1 + \sinh^2 \frac{X}{2}$ , on trouve d'une part

$$\sinh^2 \left( \frac{d_\gamma}{2} \right) = \frac{(\lambda - 1)^2}{2} \quad \text{donc} \quad \sinh \left( \frac{d_\gamma}{2} \right) = \frac{\lambda - 1}{\sqrt{2}}$$

et d'autre part

$$\sinh \left( \frac{d(z, \gamma z)}{2} \right) = \frac{\lambda - 1}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

On en déduit facilement la formule.  $\square$

On peut maintenant démontrer la classification des isométries selon la distance de déplacement :

- Preuve:**
1. Si  $d_\gamma = 0$  et  $d_\gamma$  est atteint, alors  $\gamma$  a un point fixe et c'est une isométrie elliptique.
  2. Grâce à la proposition précédente, on sait maintenant que si  $d_\gamma = 0$  et  $d_\gamma$  n'est pas atteint, alors  $\gamma$  est parabolique.
  3. Inversement, si  $\gamma$  est parabolique, alors  $\gamma$  est conjuguée à  $z \mapsto z \pm 1$ . Prenons, pour  $z$  fixé, la courbe  $c(t) = z + t$ . Alors

$$d(z, z + 1) \leq L(c) = \int_0^1 \frac{dt}{\Im z} = \frac{1}{\Im z} \rightarrow 0.$$

$\square$

### 1.4.2 Géométrie hyperbolique en dimension 3

Les preuves des énoncés de cette section sont rédigés sous forme d'exercices corrigés. On donne ici sans preuve les principaux résultats. Le plus important donne une autre description du groupe des isométries.

**Théorème 1.4.10.** *On a les isomorphismes*

$$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathcal{O}^0(3, 1) = \text{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

La preuve constitue l'exercice [ref](#) mais on donne ici quelques explications.

#### Commentaires

1. L'identification  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \text{SL}_2(\mathbb{R})$  peut sembler plus naturelle que celle de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  avec  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  puisque  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  agit naturellement sur un espace de dimension réelle 2. L'explication passe en vérité par le bord. On a déjà vu, en toutes dimensions, qu'une isométrie est caractérisée par son action au bord, via l'extension de Poincaré et que la géométrie qui se dépose sur la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique est la géométrie conforme. On peut alors montrer, comme on l'a fait en dimension 2, que  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  est le groupe conforme de la sphère  $\mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{H}^3$ . Dans ce contexte, il est en fait plus convenable de penser à la sphère  $\mathbb{S}^2$  comme à la droite projective complexe  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  sur laquelle  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  agit naturellement (nous verrons que l'action d'une isométrie à l'infini est justement l'action projective).

2. Nous présentons en exercice une autre approche, que l'on résume de la façon suivante. Soit

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}, \quad a, c \in \mathbb{R} \right\}.$$



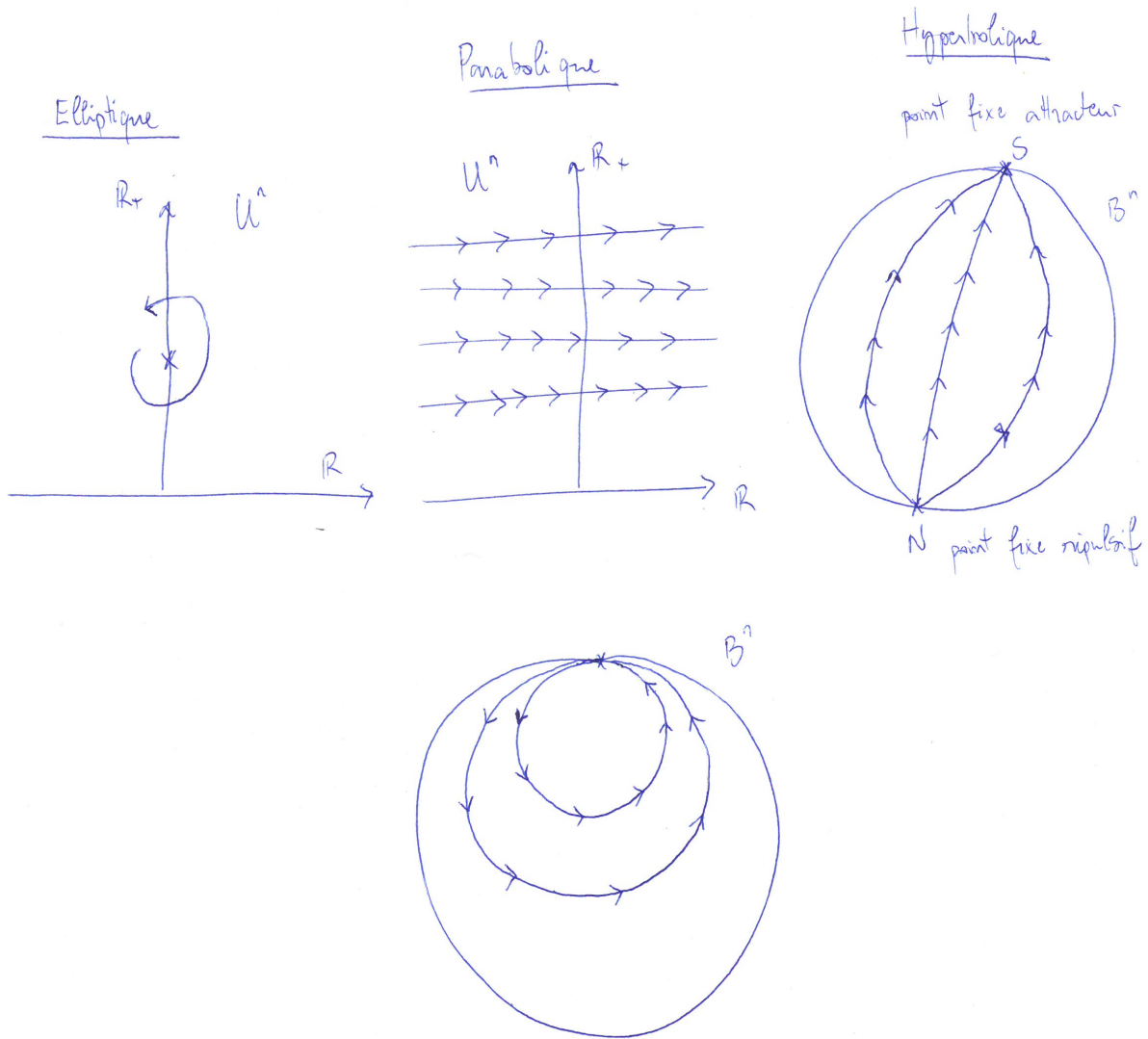


Figure 1.8: Dynamique des isométries hyperboliques

C'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 (l'espace des formes hermitiennes sur  $\mathbb{C}^2$ ). D'autre part

$$-\det \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} = |b|^2 - ac$$

de sorte que  $(L, -\det)$  est un espace de Lorentz (de type  $(3, 1)$ ). Donc

$$\mathcal{H}^3 = \{A \in L, \det A = 1\}$$

est le modèle de l'hyperboloïde de  $\mathbb{H}^3$ . L'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est maintenant naturelle (par changement de base de la forme quadratique) :

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}^3 &\longrightarrow \mathcal{H}^3 \\ (P, A) &\longmapsto PA^t \bar{P} \end{aligned}$$

C'est bien sûr une action par isométrie pour  $-\det$ . Il s'agit de montrer que l'on a toutes les isométries.

**Proposition 1.4.11.** *On a une suite exacte de groupes*

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \rightarrow 1.$$

Donc  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \{\pm 1\} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ .

3. On peut enfin expliciter l'action des isométries sur les autres modèles. Le plus simple est de constater que l'on a une isométrie

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times ]0, \infty[ = \mathcal{U}^3 &\longrightarrow \mathcal{H}^3 \\ z + tj &\longmapsto \frac{1}{t} \begin{pmatrix} |z|^2 + t^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De cette isométrie, on déduit une action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{U}^3$  donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot (z + tj) = \frac{(\alpha z + \beta)(\overline{\gamma z + \delta}) + \alpha \bar{\gamma} t^2 + tj}{|\gamma z + \delta|^2 + |\gamma|^2 t^2}.$$

Bien que peu utilisée à cause de sa complexité, cette formule montre en tout cas que  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  agit bien projectivement au bord.

4. Une autre méthode aurait constitué à appliquer une formule explicite de l'extension de Poincaré ([Beardon](#)).

## 1.5 Exercices corrigés pour le chapitre 1

### Énoncés des exercices

#### Exercice 1.1 (Formules pour la distance)

On note  $\|\cdot\|$  la distance euclidienne. Montrer que

1. pour tout  $u, v \in B^n$  on a

$$\cosh d(u, v) = 1 + \frac{2\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)} \quad \text{et} \quad \tanh \frac{d(u, v)}{2} = \frac{\|u - v\|}{(1 - 2\langle u, v \rangle + \|u\|^2 + \|v\|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

2. pour tout  $x, y \in U^n$  on a

$$\cosh d(x, y) = 1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}} \quad \text{et} \quad \tanh \frac{d(x, y)}{2} = \left( \frac{\|x' - y'\|^2 + (x_{n+1} - y_{n+1})^2}{\|x' - y'\|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $x = (x', x_{n+1})$  et  $y = (y', y_{n+1})$ ,

#### Exercice 1.2 (Modèle de Klein de la géométrie hyperbolique)

On considère la boule unité  $B^n$  munie de la métrique construite comme suit: pour  $u, v \in B^n$ , soient  $a, b \in \partial B^n = S^{n-1}$  les deux points du bord de  $B^n$  tels que  $a, u, v$  et  $b$  se trouvent sur la même droite, et  $\|a - v\| > \|a - u\|$  et  $\|b - u\| > \|b - v\|$  (faire un dessin). On définit alors la fonction suivante sur  $B^n$ :

$$d_K(u, v) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\|a - v\| \|b - u\|}{\|a - u\| \|b - v\|} \right) = \frac{1}{2} \log ([a, u, v, b]).$$

1. Montrer que le modèle de la boule unité  $(B^n, d)$  et de Klein  $(B^n, d_K)$  sont isométriques, où  $d$  est donnée explicitement par le point (a) du premier exercice.

**Indication:** Un bon moyen de passer d'un modèle à l'autre est de faire une étape par l'hyperboloïde.

2. Demander à l'assistant pourquoi ce modèle est le même que le modèle projectif défini en cours.

**Exercice 1.3 (Autour de l'hyperboloïde)**

On rappelle que la métrique  $d$  sur  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est définie par

$$\cosh d(x, y) = -x \cdot y = -\frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)),$$

avec  $q$  la forme quadratique définie par  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ .

1. Supposons que  $n = 2$  et soient  $x, y \in \mathbb{R}^3$  et

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit le *produit vectoriel lorentzien* de  $x$  et  $y$  par  $x \otimes y := J(x \times y)$ , où  $\times$  est le produit vectoriel euclidien. Montrer que pour tout  $w, x, y, z \in \mathbb{R}^3$

(a)  $x \cdot (x \otimes y) = y \cdot (x \otimes y) = 0$ . On dit dans que  $x \otimes y$  est *Lorentz-orthogonal* à  $x$  et  $y$ .

(b)  $x \otimes y = -y \otimes x$

(c)  $(x \otimes y) \cdot z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

(d)  $x \otimes (y \otimes z) = (x \cdot y)z - (z \cdot x)y$

(e)  $(x \otimes y) \cdot (z \otimes w) = \begin{vmatrix} x \cdot w & x \cdot z \\ y \cdot w & y \cdot z \end{vmatrix}$

2. On suppose toujours que  $n = 2$ , mais maintenant  $x, y \in \mathbb{H}^n$ . Montrer que  $\|x \otimes y\|^2 = \sinh d(x, y)$ .
3. En utilisant le fait que  $O_H$  est transitif sur  $\text{Vect}(x, y, z)$  pour tout  $x, y, z \in \mathbb{H}^n$  ainsi que les points précédents, montrer que  $d$  satisfait l'inégalité du triangle.
4. (Sera utilisé au cours) On dit que trois points  $x, y, z \in \mathbb{H}^n$  sont *hyperboliquement colinéaires* s'il existe un plan vectoriel contenant  $x, y$  et  $z$ . Montrer que si trois points  $x, y, z \in \mathbb{H}^n$  vérifient

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z),$$

alors ces trois points sont hyperboliquement colinéaires.

**Exercice 1.4 (Le théorème de Sylvester)**

Soit  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique réelle sur  $\mathbb{R}^n$ , i.e. un polynôme réel homogène de degré deux. On définit *l'indice de  $q$*  comme étant la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $Q(x) < 0$  pour tout  $x \in V \setminus \{0\}$ . Si  $q$  est l'indice de  $Q$  et  $p$  est la dimension maximale d'un sous-espace  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $Q(x) > 0$  pour tout  $x \in W \setminus \{0\}$ , alors on appelle le couple  $(p, q)$  la *signature de  $Q$* . Les vecteurs  $x \in \mathbb{R}^n$  tels que  $Q(x) = 0$  sont appelés *isotropes*. Observer que

$$B(x, y) := \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^n$ , appelée la *forme polaire de  $Q$* .

1. Montrer qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que

(a)  $B(e_i, e_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ ,

- (b)  $B(e_i, e_i) \neq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq r = \text{rang}(B)$ ,
- (c)  $B(e_i, e_i) = 0$  pour tout  $r < i \leq n$ ,

une telle base est dite *orthogonale pour  $Q$* .

2. Montrer le *théorème de Sylvester*: pour toute base  $(e_1, \dots, e_n)$  orthogonale pour  $Q$  on a

$$p = \#\{i \mid Q(e_i) > 0\} \quad \text{et} \quad q = \#\{i \mid Q(e_i) < 0\}.$$

3. Dans le cas particulier de  $\mathbb{R}^{n,1}$  vu au cours la semaine passée, montrer que si  $W \subset \mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$ , alors les seules signatures possibles pour la restriction de  $q$  à  $W$  sont  $(m, 0)$ ,  $(m-1, 1)$  ou  $(m-1, 0)$ .
4. Montrer que si  $x, y \in \mathbb{H}^n$ , alors la restriction de  $q$  à  $\text{Vect}(x, y)$  est de signature  $(1, 1)$ .

### Exercice 1.5 (Sphères hyperboliques)

On note  $S_B(b, r)$  la *sphère hyperbolique de centre  $b \in B^n$  et de rayon  $r > 0$* , i.e.

$$S_B(b, r) = \{x \in B^n \mid d_B(b, x) = r\}.$$

Montrer qu'un sous-ensemble  $S \subset B^n$  est une sphère hyperbolique si et seulement si  $S$  est une sphère euclidienne de  $E^n$  contenue dans  $B^n$ .

**Indication:** L'application  $\tau_b$  définie au cours la semaine passée pourrait être utile.

**Exercice 1.6 (Gauss-Bonnet hyperbolique)** Dans cet exercice, on introduit la notion *volume hyperbolique*. On définit le volume hyperbolique d'un sous-ensemble  $A \subset U^2$  par

$$\mu(A) := \int_A \frac{dx dy}{y^2},$$

si cette intégrale existe. L'expression  $\frac{dx dy}{y^2}$  est appelé *élément de surface hyperbolique*. Un *polygone hyperbolique à  $n$  côtés* est un sous-ensemble fermé de  $\bar{U}^2 \cup \{\infty\}$  borné par  $n$  segments géodésiques (pour la distance hyperbolique). Si deux de ces segments s'intersectent, on appelle leur intersection un *sommet* du polygone. Remarquons que bien que des sommets puissent se trouver dans  $\partial U^2 \cup \{\infty\}$ , aucun segment géodésique ne peut se trouver dans  $\partial U^2$ .

Soit  $T$  un triangle hyperbolique (un polygone hyperbolique à 3 côtés) dans  $U^2$ , d'angles intérieurs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . En supposant que  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \subset \text{Isom}(U^2) = M(U^2)$  (on montrera ceci dans la suite du cours), montrer que

$$\mu(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

**Indication:** Faire d'abord le cas où un ou plusieurs des sommets du triangle se trouvent dans  $\partial U^2 \cup \{\infty\}$ . Ensuite, se ramener à ce cas et utiliser la transitivité de l'action du groupe d'isométries sur le bord à l'infini.

### Exercice 1.7 Trigonométrie hyperbolique.

1. On se place dans le modèle du disque hyperbolique ou du  $1/2$  plan. La mesure de l'angle hyperbolique entre deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $T_z \mathbb{H}^2$  est donnée par

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle_{\text{hyp}}}{\|u\|_{\text{hyp}} \|v\|_{\text{hyp}}}.$$

Un angle hyperbolique entre deux segments géodésiques qui s'intersectent au point  $z$  est par définition l'angle dans  $T_z \mathbb{H}^2$  entre les deux vecteurs dérivés des géodésiques. Montrer que cette notion d'angle est la même chose que l'angle euclidien

2. On considère un triangle hyperbolique  $T$  dont les cotés sont des segments géodésiques, les angles aux sommets sont des nombres strictement positifs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  et les longueurs des côtés opposés  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Prouver les trois lois de la trigonométrie hyperbolique

(a) **Loi du sinus**

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

(b) **Première loi du cosinus**

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

(c) **Deuxième loi du cosinus**

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

3. Expliquer pourquoi la deuxième loi du cosinus n'a pas d'analogue en géométrie euclidienne. Quels sont les paramètres dont on a besoin pour reconnaître un triangle hyperbolique à isométries près ? Comparer avec le cas euclidien.

**Exercice 1.8 Sur la topologie de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .**

1. Rappeler la définition d'une topologie quotient.
2. Montrer que  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  est un groupe topologique (c'est-à-dire que les opérations de groupe sont continues) et qu'il est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ .
3. (\*) Comment peut-on analyser la topologie de  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 1.9 Sur la transitivité de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  au bord du plan hyperbolique.**

1. Montrer que l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  est deux fois transitive sur le bord de  $\mathbb{H}^2$ .
2. Que peut-on dire d'une isométrie de  $\mathbb{H}^2$  qui fixe trois points du bord.

**Exercice 1.10 Les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens.**

On se place dans le modèle du  $1/2$  plan. Montrer que tous les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens (avec un centre et un rayon différent) et inversement.

**Exercice 1.11 (Horosphères dans les différents modèles)**

On se place pour commencer dans le modèle de la boule conforme. Une *horosphère*  $\Sigma$  de  $B^n$  basée en un point  $b \in S^{n-1}$  est l'intersection avec  $B^n$  d'une sphère euclidienne de  $\overline{B}^n$  tangente à  $S^{n-1}$  en  $b$ . En utilisant les isométries (désormais familières)  $B^n \rightarrow U^n$  et  $B^n \rightarrow H^n$ , on définit une horosphère dans  $U^n$  (resp. dans  $H^n$ ) comme l'image d'une horosphère dans  $B^n$  par l'une ou l'autre de ces isométries.

- (a) Pour  $n = 2$ , dessiner des horocycles (i.e. des horosphères en dimension 2) dans  $B^2, U^2$  et  $H^2$ .
- (b) Comparer la longueur hyperbolique d'un segment d'horocycle à la distance hyperbolique entre ses extrémités et en déduire qu'il est ridicule de se déplacer le long d'un horocycle.

**Exercice 1.12 (Un autre modèle de  $H^3$ )**

- (a) Compléter et détailler l'argument donné en cours établissant que  $\text{Isom}(H^3) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ .
- (b) Expliciter l'action de l'action de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  sur  $U^3$ .
- (c) Pour une matrice  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , on pose  $\|\gamma\|^2 = \text{tr}(\gamma^t \bar{\gamma})$ . Montrer que  $\gamma$  fixe  $j$  si et seulement si  $\|\gamma\|^2 = 2$

*Indication : En utilisant les formules pour la distance, montrer que  $\|\gamma\|^2 = 2 \cosh d(j, \gamma(j))$ .*

- (d) On s'intéresse enfin aux classes de conjugaison des éléments de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ .
  - (i) Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux éléments de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  différents de l'identité. Montrer que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont conjugués dans  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  si et seulement si  $\text{tr}(\gamma_1)^2 = \text{tr}(\gamma_2)^2$ .
  - (ii) Pour tout  $k \neq 1$ , on note

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que chaque élément  $\gamma$  de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  est conjugué à l'un des  $\gamma_k$  ou à  $\gamma_1$ . Puis que  $\gamma_k$  est conjugué à  $\gamma_{k'}$  si et seulement si  $k = k'$  ou  $k = \frac{1}{k'}$ .

- (iii) Montrer que  $\gamma$  est parabolique si et seulement si  $\gamma$  est conjugué à  $\gamma_1$ , que  $\gamma$  est elliptique si et seulement si  $\gamma$  est conjugué à un  $\gamma_k$  avec  $|k| = 1$  et que  $\gamma$  est parabolique si et seulement si  $\gamma$  est conjugué à  $\gamma_k$  avec  $|k| \neq 1$ .
- (e) Soit  $\gamma$  un hyperbolique de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ . On dit que  $\gamma$  est strictement hyperbolique s'il existe un disque ouvert  $D$  de  $\mathbb{S}^2$  tel que  $\gamma(D) = D$ . Sinon on dit que  $\gamma$  est loxodromique. Montrer que
  1.  $\gamma$  est parabolique si et seulement si  $\text{tr} \gamma^2 = 4$ .
  2.  $\gamma$  est elliptique si et seulement si  $\text{tr} \gamma^2 \in \mathbb{R}$  et  $\text{tr} \gamma^2 \in [0, 4[$ .
  3.  $\gamma$  est strictement hyperbolique si et seulement si  $\text{tr} \gamma^2 \in \mathbb{R}$  et  $\text{tr} \gamma^2 \in ]4, +\infty[$ .
  4.  $\gamma$  est loxodromique si et seulement si  $\text{tr} \gamma^2 \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cap ]0, +\infty[$ .

**Exercice 1.13 (Les isométries de  $U^3$ )**

- (a) On regarde les éléments de  $(z, t) \in U^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$  comme des quaternions via l'identification

$$(z, t) \in U^3 \mapsto u = z + tj \in \mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j,$$

et on rappelle que  $jz = \bar{z}j$  pour  $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i \subset \mathbb{H}$ . On définit ensuite une application

$$\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times U^3 \longrightarrow \mathbb{H}^*, \quad (g, (z, t)) \longmapsto (au + b)(cu + d)^{-1},$$

où  $u = z + tj$  et  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que cette application définit une action fidèle et transitive sur  $U^3$  (il sera utile de calculer explicitement  $(z', t') = g \cdot (z, t)$ ).

**Indication:** Pour la transitivité, montrer que  $U^3$  est l'orbite de  $j$ .

- (b) Montrer que  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est engendré par les éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Montrer que

$$\mathrm{Isom}^+(U^3) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}.$$

**Indication:** Pour montrer qu'une isométrie de  $U^3$  est dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  on se souviendra du théorème d'extension de Poincaré de la série 1.

**Exercice 1.14 (Flot géodésique dans  $H^2$ )**

- (a) On considère le *fibré tangent unitaire* de  $H^2$ , i.e. on considère

$$T^1H^2 = \{(z, \xi) \in TH^2 \mid \|\xi\|_z = 1\}.$$

Montrer que le groupe des isométries de  $H^2$  agit sur le fibré tangent unitaire via

$$g \cdot (z, \xi) \mapsto (g \cdot z, d_z g(\xi)) = \left( g \cdot z, \frac{1}{(cz + d)^2} \xi \right),$$

avec  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que cette action est transitive, libre. En déduire qu'il y a une identification  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = T^1H^2$  et que l'on peut induire une structure de groupe sur  $T^1H^2$ .

- (b) Montrer qu'étant donné un élément du fibré tangent  $(z, \xi) \in TH^2$ , il existe une unique géodésique  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H^2$  de l'espace hyperbolique telle que  $\gamma(0) = z$  et  $\dot{\gamma}(0) = \xi$ . Montrer de plus qu'on peut la choisir telle que  $\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} = \|\xi\|_z$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

- (c) Montrer qu'on a une action de  $\mathbb{R}$  sur  $T^1H^2$  de la façon suivante:

$$\mathbb{R} \times T^1H^2 \longrightarrow T^1H^2, \quad (t, (z, \xi)) \mapsto (z_t, \xi_t),$$

où  $z_t = \gamma(t)$  et  $\xi_t = \dot{\gamma}(t)$ , avec  $\gamma$  l'unique géodésique telle que  $\gamma(0) = z$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \xi$  et  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . La famille d'applications  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , où

$$\varphi_t : T^1H^2 \longrightarrow T^1H^2, \quad \varphi_t(z, \xi) = (z_t, \xi_t),$$

est appelée *flot géodésique*.

- (d) En identifiant  $\mathbb{R}$  à

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

montrer que le flot géodésique correspond au flot sur le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  donné par multiplication à droite:

$$A \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \quad (g_t, g) \mapsto gg_t,$$

où

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1.15** En dimension 2 et 3, décrire le plus précisément possible le stabilisateur d'un point du bord de l'espace hyperbolique dans le groupe d'isométries.

Corrigés des exercices (ou référence)

Exercice 1.1

**Exercice 1.2** Fixons d'abord les notations. Soit

$$\begin{aligned}\phi : (B^n, d) &\longrightarrow (H^n, d') \\ u &\longmapsto \left( \frac{2u_1}{1-\|u\|^2}, \dots, \frac{2u_n}{1-\|u\|^2}, \frac{1+\|u\|^2}{1-\|u\|^2} \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi : (H^n, d') &\longrightarrow (B^n, d_K) \\ x &\longmapsto \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right)\end{aligned}$$

La composée de ces deux applications vaut

$$\varphi(u) := \psi \circ \phi(u) = \frac{2u}{1 + \|u\|^2},$$

on constate donc que  $\varphi$  envoie les droites vectorielles sur les droites vectorielles. Elle ne fait que dilater le vecteur  $u$  d'un facteur  $\frac{2}{1+\|u\|^2} > 1$  puisque  $\|u\| < 1$ . On veut montrer que pour tout  $u, v \in B^n$

$$d(u, v) = d_K(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Etant donnés  $u, v \in B^n$  on sait qu'il existe une isométrie de  $(B^n, d)$  qui envoie  $u$  sur l'origine et  $v$  sur un multiple positif de  $e_1$ . Par définition, cette isométrie est dans  $PO(n, 1)$  et comme les éléments de  $PO(n, 1)$  préservent le birapport, on en déduit que  $PO(n, 1) \subset \text{Isom}(d_K)$ . Ainsi l'isométrie de  $(B^n, d)$  considérée est aussi une isométrie de  $(B^n, d_K)$ . On en déduit que sans perte de généralité  $u = 0$  et  $v = \lambda e_1$ , avec  $\lambda > 0$ . On a donc  $\varphi(u) = 0$  et  $\varphi(v) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}e_1$ . On a alors d'une part par un lemme du cours que

$$d(u, v) = 2\text{arctanh}\|v\| = 2\text{arctanh}(\lambda).$$

D'autre part, par définition de  $d_K$  on a si  $a = -e_1$  et  $b = e_1$  sont les points d'intersections de la droite passant par  $\varphi(u) = 0$  et  $\varphi(v) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}e_1$  et de la boule unité:

$$\begin{aligned}d_K(\varphi(u), \varphi(v)) &= \frac{1}{2} \log[a, \varphi(u), \varphi(v), b] \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{\| -e_1 - \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}e_1 \| \| e_1 - 0 \|}{\| -e_1 - 0 \| \| e_1 - \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}e_1 \|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{(1+\lambda)^2}{(1-\lambda)^2} \right) \\ &= \log \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right).\end{aligned}$$

Or, par une identité bien connue de trigonométrie hyperbolique (!) on sait que pour tout  $z \in (-1, 1)$

$$2\text{arctanh}(z) = \log \left( \frac{1+z}{1-z} \right),$$

ce qui termine la preuve.

Pour le dernier point de l'exercice, remarquer que l'application  $\Psi$  est la composée de la projection de  $\mathcal{H}^n$  dans l'espace projectif, puis d'une carte affine. Puisque  $K^n$  est totalement contenu dans l'ouvert de définition de la carte affine, il s'identifie à son image  $B^n$ .



**Exercice 1.3**

**Exercice 1.4**

**Exercice 1.5**

**Exercice 1.6** La preuve s'articule en trois étapes.

- (1) On montre d'abord que le volume hyperbolique est invariant sous l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .
- (2) On montre le théorème dans le cas où l'un des sommets du triangle se trouve dans  $\partial U^2$ .
- (3) On montre le théorème dans le cas où tous les sommets du triangle se trouvent dans  $U^2$  en se ramenant au cas précédent.

**Etape 1:** On écrit l'image de  $z \in U^2 = \{z = x + iy \mid y > 0\}$  par un élément  $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  comme

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Ainsi, le jacobien de la transformation  $z = x + iy \mapsto M(z) = w = u + iv$  est donné par

$$J_M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left| \frac{dM}{dz} \right|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4},$$

où on a utilisé les équations de Cauchy-Riemann. Ainsi si  $A \subset U^2$  est tel que  $\mu(A)$  existe, alors

$$\mu(M(A)) = \int_M (A) \frac{dudv}{v^2} = \int_A J_M(x, y) \frac{dxdy}{v^2} = \int_A \frac{1}{|cz + d|^4} \frac{|cz + d|^4}{y^2} dxdy = \mu(A).$$

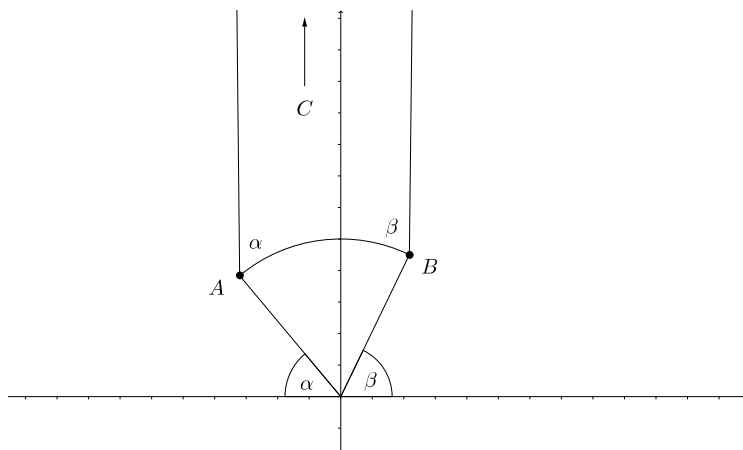
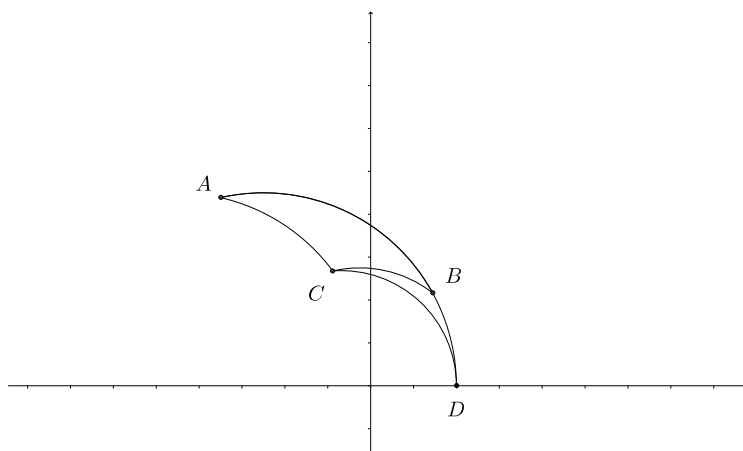
**Etape 2:** On suppose que l'un des sommets du triangle  $T$  est dans  $\partial U^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Si ce sommet appartient à  $\mathbb{R}$ , alors on peut l'envoyer, via une transformation  $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur le point  $\{\infty\}$  et ceci sans changer ni les angles ni le volume hyperbolique du triangle puisque  $M$  est une transformation de Möbius et que ces dernières sont conformes par l'exercice 2 et qu'elles préservent le volume hyperbolique par l'étape 1. Ainsi, deux des arêtes du triangles sont des géodésiques verticales et la troisième est un arc de cercle centré sur l'axe réel. Quitte à appliquer des transformations de Möbius du type  $z \mapsto z + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ , et/ou  $z \mapsto \lambda z$  avec  $\lambda > 0$ , on peut supposer que le cercle en question est centré en 0 et est de rayon 1 (ces transformations envoient les géodésiques verticales sur des géodésiques verticales donc l'angle nul à l'infini est préservé) comme montré à la figure 1.9. Les géodésiques verticales passant respectivement par  $A$  et  $B$  sont données respectivement par  $x = a$  et  $x = b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ainsi

$$\mu(T) = \int_T \frac{dxdy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = \pi - \alpha - \beta.$$

Remarquons que la technique utilisée pour cette étape marche tout aussi bien si deux voire trois sommets sont dans  $\partial U^2 \cup \{\infty\}$ ; il suffit en effet d'utiliser un élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  pour envoyer un sommet sur le point  $\{\infty\}$  puis de faire le même raisonnement avec  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \beta = 0$ .

**Etape 3:** On suppose maintenant que les trois sommets du triangle  $T$  sont dans  $U^2$ . L'idée est d'exprimer  $T$  comme différence de deux triangles ayant au moins un sommet à l'infini et ainsi de se ramener au cas précédent. Dans la figure 1.10, l'aire (hyperbolique) du triangle  $T$  est la différence des aires des triangles  $T_1$  de sommets  $A, C$  et  $D$ , et  $T_2$  de sommets  $B, C$  et  $D$ . Ainsi, si  $\theta$  est l'angle  $\widehat{BCD}$  on a

$$\mu(T) = \mu(T_1) - \mu(T_2) = \pi - \alpha - (\gamma + \theta) - [\pi - \theta - (\pi - \beta)] = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Figure 1.9: Le triangle avec un sommet en  $\infty$ Figure 1.10: Le triangle avec tous les sommets dans  $U^2$ **Exercice 1.7****Exercice 1.8****Exercice 1.9****Exercice 1.10****Exercice 1.11****Exercice 1.12****Exercice 1.13****Exercice 1.14****Exercice 1.15**

## Chapter 2

# Intermède : Groupe fondamental et revêtements

Par convention, tous les espaces topologiques considérés seront des variétés topologiques. On peut bien sûr développer une théorie similaire dans un contexte plus général, voir [Hatcher](#) et [Paulin](#) (à qui j'emprunte d'ailleurs beaucoup pour ces notes).

### 2.1 Groupe fondamental

**Définition 2.1.1.** Soit  $f$  et  $g$  deux application continues entre 2 variétés topologiques  $X$  et  $Y$ . On dit que  $f$  est homotope à  $g$  et on note  $f \sim g$  s'il existe une application continue  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que, pour tout  $x \in X$ ,

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad H(x, 1) = g(x).$$

Si  $A \subset X$  est une sous-variété de  $X$ , on dit que  $f$  et  $g$  sont homotopes relativement à  $A$  si de plus, pour tout  $a \in A$ , l'application  $t \mapsto H(a, t)$  est constante (en particulier, cela impose que  $f(a) = g(a)$  pour tout  $a \in A$ ).

**Définition 2.1.2.** Un espace  $X$  est dit contractile s'il est non vide et si  $\text{id}_X$  est homotope à une application constante.

Par exemple, si  $X$  est convexe, alors  $X$  est contractile (et se contracte sur n'importe lequel de ses points). En effet, soit  $x_0 \in X$ , alors  $H(t, x) = tx + (1 - t)x_0$  est une homotopie de  $\text{id}_X$  à l'application constante en  $x_0$ .

**Définition 2.1.3.** Une variété  $X$  est dite simplement connexe si  $X$  est connexe et si toute application continue  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  se prolonge en une application continue  $\tilde{f} : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$ .

On montrera en exercice qu'une variété contractile est simplement connexe mais que la réciproque est fausse.

**Définition 2.1.4.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On dit que c'est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que

- $f \circ g \sim \text{id}_Y$  et
- $g \circ f \sim \text{id}_X$

Dans ce cas, on dit que  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie.

Par exemple, dire qu'une variété  $X$  est contractile est équivalent à dire que  $X$  a le type d'homotopie d'un point.

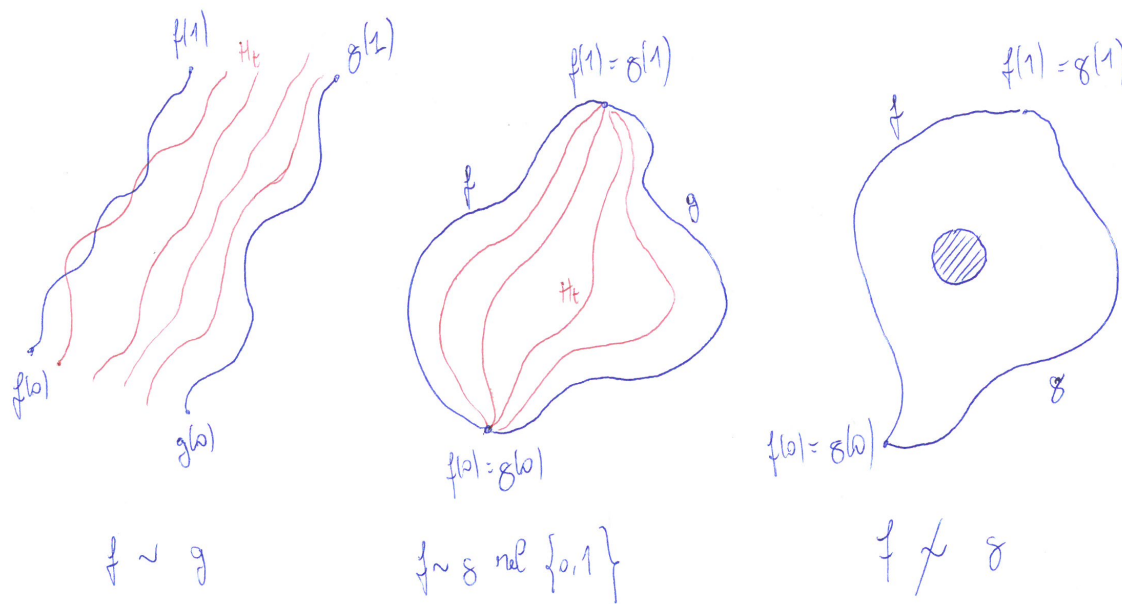


Figure 2.1: Homotopies

**Définition 2.1.5.** Soit  $X$  une variété et  $A$  une sous-variété de  $X$ . On dit que  $X$  se rétracte par déformations sur  $A$  s'il existe une application  $r : X \rightarrow A$  telle que

- $r \circ i = \text{id}_A$  et
- $i_X \circ r \sim \text{id}_X$  ( $i_X$  est l'injection de  $A$  dans  $X$ ).

**Définition 2.1.6.** Un chemin est une application continue  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . L'origine de  $\alpha$  est  $\alpha(0)$  et son extrémité est  $\alpha(1)$ . On dit de plus que  $\alpha$  est un lacet si son origine est égal à son extrémité. On note  $[\alpha]$  la classe d'homotopie d'un chemin  $\alpha$ .

Et enfin

**Définition 2.1.7.** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux chemins dans  $X$  tels que  $\alpha(1) = \beta(0)$ .

- Le chemin inverse de  $\alpha$  est le chemin noté  $\alpha^{-1}$  et défini par

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

- La concaténation de  $\alpha$  et  $\beta$  est le chemin noté  $\alpha \cdot \beta$  (noter bien l'ordre des deux chemins; la notation n'est pas compatible avec la convention de notation de la composition des applications) défini par

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

**Théorème 2.1.8.** Soit  $X$  une variété topologique; on note  $\pi_1(X, x)$  l'ensemble des classes d'homotopies de lacets dans  $X$  d'origines  $x \in X$ . La concaténation des chemins donne à  $\pi_1(X, x)$  une structure de groupe. Si  $X$  est connexe, alors  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1(X, y)$  sont isomorphes pour tout couple  $(x, y)$  de points de  $X$ . On appelle l'un de ces groupes le groupe fondamental de  $X$ .

La dernière assertion signifie que le groupe fondamental de  $X$  s'identifie à  $\pi_1(X, x)$  dès que l'on fixe un point base  $x \in X$ .

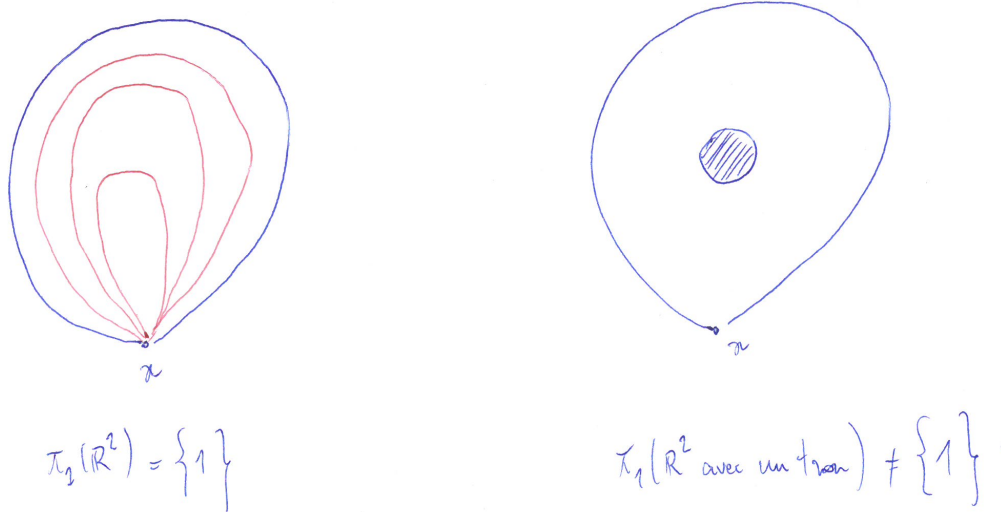


Figure 2.2: La structure du groupe fondamental détecte les trous

**Preuve:** • **Associativité :** soit  $\alpha$  un chemin joignant  $x$  à  $y$ ,  $\beta$  un chemin joignant  $y$  à  $z$  et  $\gamma$  un chemin joignant  $z$  à  $w$ . Il s'agit de montrer que  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$  et  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  sont homotopes. Pour cela, on change continûment les vitesses de parcours des chemins

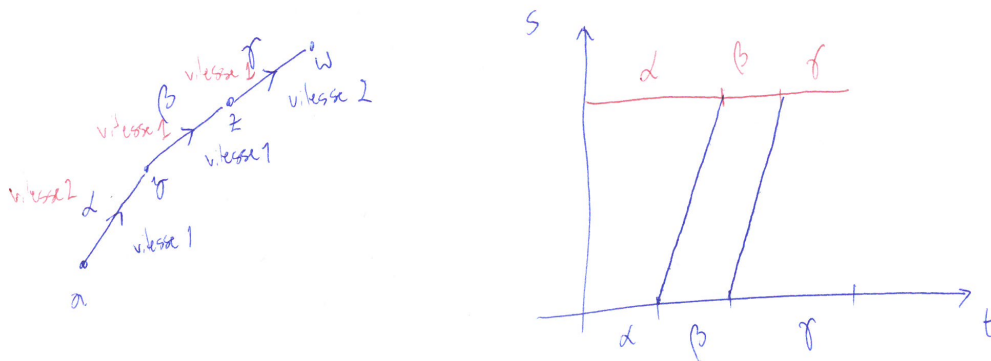


Figure 2.3: Les chemins  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  et  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$  sont homotopes

Soit en effet l'homotopie  $H$  définie par

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t - s - 1) & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- **Élément neutre :** On montre que la classe du lacet constant en  $x$  est l'élément neutre ou même plus généralement, que si  $\alpha$  est un lacet joignant  $x$  à  $y$  et si  $c_x$

et  $c_y$  sont les lacets constants en  $x$  et  $y$  respectivement, alors  $c_x \cdot \alpha$  et  $\alpha \cdot c_y$  sont homotopes. Pour cela, il suffit de montrer que  $\alpha \cdot c_y$  est homotope à  $\alpha$ . L'idée est de parcourir  $\alpha$  de plus en plus lentement et de rester de moins en moins longtemps sur  $y$ . En effet soit  $H$  l'homotopie

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- **Inverse** : Voyons déjà que la classe de  $c^{-1}$  ne dépend pas du représentant  $c$  de  $[c]$ . Cela provient du fait que si  $(t, s) \mapsto H(t, s)$  est une homotopie de  $\alpha$  à  $\beta$ , alors  $(t, s) \mapsto H(1-t, s)$  est une homotopie de  $\alpha^{-1}$  à  $\beta^{-1}$ . Pour montrer que  $|c^{-1}|$  est l'inverse de  $|c|$ , on montre en fait plus généralement que si  $\alpha$  joint  $x$  à  $y$ , alors  $\alpha \cdot \alpha^{-1}$  et  $\alpha^{-1} \cdot \alpha$  sont homotopes à  $c_x$  et  $c_y$  respectivement. Pour construire l'homotopie, l'idée est de passer un peu de temps sur  $x$  (de moins en moins), puis de parcourir le chemin  $\alpha$  puis  $\alpha^{-1}$  mais de s'arrêter en cours de route et faire demi-tour de plus en plus près de  $x$  et enfin de rester sur  $x$  jusqu'à la fin du temps de parcours. En effet, soit  $H$  l'homotopie

$$H(t, s) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(2t-s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2t-s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ x & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Enfin, si  $X$  est connexe, alors  $X$  est connexe par arcs car  $X$  est une variété. Si  $\alpha$  est un chemin de  $x$  à  $y$ , alors

$$\alpha^{-1}\pi_1(X, x)\alpha = \pi_1(X, y)$$

avec les conventions de notation de la concaténation.  $\square$

Le groupe fondamental est construit pour donner des informations sur les classes d'homotopies de variétés topologiques (c'est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans celle des groupes abéliens) :

**Proposition 2.1.9.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue.*

- Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux chemins homotopes dans  $X$ , alors  $f \circ \alpha$  et  $f \circ \beta$  sont homotopes dans  $Y$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont homotopes, alors  $\pi_1(Y, f(x))$  et  $\pi_1(Y, g(x))$  sont isomorphes.
- Si  $f$  est une équivalence d'homotopie, alors  $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(Y, f(x))$ .

Enfin, on montre que le groupe fondamental permet de détecter la simple connexité de  $X$ .

**Proposition 2.1.10.** *La classe  $|\alpha|$  de  $\alpha$  est triviale dans  $\pi_1(X, x)$  si et seulement si  $\alpha$  s'étend continûment en une application  $\bar{\alpha} : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$ . En particulier,  $\pi_1(X, x) = \{1\}$  si et seulement si  $X$  est simplement connexe.*

## 2.2 Revêtements

### 2.2.1 Généralités

**Définition 2.2.1.** *Soit  $X$  et  $B$  deux variétés topologiques et  $f : X \rightarrow B$  une application continue. On dit que  $f$  est un revêtement de  $X$  sur  $B$  si, pour tout  $b \in B$ , il existe un*



**Définition 2.2.2.** Soit  $f : X \rightarrow B$  et  $f' : X' \rightarrow B$  deux revêtement de mêmes bases. Un morphisme de revêtements de  $f$  sur  $f'$  est une application  $\phi : X \rightarrow X'$  qui envoie les fibres de  $f$  sur celles de  $f'$ , c'est-à-dire qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & B & \end{array}$$

Nous verrons enfin en exercice qu'un revêtement est un homéomorphisme local et que la réciproque est très souvent vraie.

### 2.2.2 Actions de groupes topologiques

**Définition 2.2.3.** Un groupe topologique  $G$  est un groupe muni d'une topologie telle que

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

soit une application continue. Un morphisme de groupes topologiques est un morphisme de groupes qui est une application continue.

**Définition 2.2.4.** Soit  $X$  une variété topologique et soit  $G$  un groupe topologique. Une action continue de  $G$  sur  $X$  est une application continue  $G \times X \rightarrow X$  telle que, pour tous  $g, g'$  et tout  $x$ ,

- $g'(gx) = (g'g)x$  et
- $ex = x$

Le graphe de l'action est l'application

$$\begin{aligned} \text{gr} : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (gx, x) \end{aligned}$$

On dit qu'une action est propre si son application graphe est propre

Rappelons qu'une application continue est dite propre si l'image inverse de tout compact est compact. **caractérisation de Paulin.**

**Proposition 2.2.5.** Une action est propre si et seulement si, pour tout compact  $K$  de  $X$ , il y a peu d'élément de  $G$  qui déplacent peu  $K$ , c'est-à-dire que l'ensemble

$$\{g \in G, K \cap gK \neq \emptyset\}$$

est compact.

Lorsque  $G$  est discret (ce qui est souvent le cas dans la suite), cette condition est équivalente au fait que  $\{g \in G, K \cap gK \neq \emptyset\}$  est fini.

**Preuve:** Supposons l'action propre et prenons un compact  $K$  de  $X$ . Alors  $K \times K$  est un compact de  $X \times X$ , puis

$$\text{gr}^{-1}(K \times K) = \{(g, x), (gx, x) \in K \times K\}$$

et compact, donc  $\text{pr}_1(\text{gr}^{-1}(K \times K))$  aussi et

$$\text{pr}_1(\text{gr}^{-1}(K \times K)) = \{g \in G, K \cap gK \neq \emptyset\}.$$

Inversement, si  $L$  est un compact de  $X \times X$ , soit  $K$  un compact de  $X$  tel que  $L \subset K \times K$  (par exemple  $K = \text{pr}_1(L) \cup \text{pr}_2(L)$ ). Alors  $\text{gr}^{-1}(L)$  est un fermé contenu dans  $\{g \in G, K \cap gK \neq \emptyset\} \times K$  qui est compact. Donc  $\text{gr}^{-1}(L)$  est compact.  $\square$



**Définition 2.2.6.** On dit que l'action est libre si l'application  $gr$  est injective, c'est-à-dire, si pour tout  $x \in X$ , son stabilisateur est trivial :

$$G_x = \text{Stab}_G(x) := \{g \in G, gx = x\} = \{1\}.$$

**Théorème 2.2.7.** Soit  $G$  un groupe discret agissant librement et proprement sur une variété séparée  $X$ . Alors

- (i) Pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $gV \cap V = \emptyset$  pour tout  $g \neq e$ .
- (ii) Chaque orbite est discrète.
- (iii) La projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/G$  est un revêtement et le quotient  $X/G$  est une variété.

**Preuve:** (i) L'application  $gr$  est, par hypothèse, continue, injective et fermée (car propre). C'est donc un homéomorphisme sur son image. L'application  $gr$  envoie  $\{e\} \times X$  sur la diagonale et  $\{e\} \times X$  est ouvert (car  $G$  est discret donc  $\{e\}$  est ouvert). Donc la diagonale est un ouvert de  $\text{Im } gr$ . Soit donc  $x \in X$ . Il existe un ouvert  $V$  autour de  $x$  tel que  $V \times V \cap \text{Im } gr$  soit contenu dans la diagonale. Ensuite  $gr^{-1}(V \times V) \subset \{e\} \times X$  donc  $gV \cap V$  est non vide uniquement lorsque  $g = e$ .

(ii) découle immédiatement de (i).

(iii) Soit  $V$  comme dans (i). Alors  $U = \pi(V)$  convient (c'est un ouvert distingué) pour la définition de fibré et convient aussi pour fabriquer des cartes de  $X/G$ , quitte à le rétrécir un peu. Il suffit en effet de prendre  $V$  suffisamment petit pour qu'il soit contenu dans un ouvert de cartes. On construit ensuite des cartes de  $X/G$  en utilisant le fait que  $U$  est homéomorphe à  $V$ .

□

**Remarque** On peut montrer aussi que l'espace des orbites  $X/G$  est séparé. À rédiger, Godbillon p.29

### 2.2.3 Relèvements

Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement et soit  $f : Y \rightarrow B$  une application continue. Un relèvement de  $f$  est une application continue  $\bar{f} : Y \rightarrow X$  telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \bar{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Un cas particulier est celui où  $Y = [0, 1]$ . On parle alors de relèvement de chemins. Dans ce contexte, on se pose les questions suivantes

1.  $\bar{f}$  existe-t-elle et, si oui, est-elle unique ?
2. Deux chemins homotopes se relèvent-ils en des chemins homotopes ?

Commençons tout de suite par l'unicité.

**Proposition 2.2.8.** Deux relèvements qui coïncident en un point sont identiques.

**Preuve:** Soit donc  $f'$  et  $f''$  deux relèvements qui coïncident en un point. On définit

$$A_0 = \{u \in Y, f'(u) = f''(u)\} \quad \text{et} \quad A_1 = \{u \in Y, f'(u) \neq f''(u)\}$$

Il suffit de montrer que  $A_0$  et  $A_1$  sont ouverts puisque  $A_0$  est non vide par hypothèse.

Soit  $u \in A_0$ ,  $U$  un ouvert distingué autour de  $f(u)$  et  $h : U \times D \rightarrow p^{-1}(U)$  la trivialisatıon locale. Il existe  $d \in D$  tel que  $f'(u) \in h(U \times \{d\}) = V_d$ . Alors  $f'^{-1}(V_d) \cap f''^{-1}(V_d)$  est un ouvert de  $A_0$ .

Soit maintenant  $u \in A_1$ . Alors il existe  $d'$  et  $d''$  tels que  $f'(u) \in V_{d'}$  et  $f''(u) \in V_{d''}$ . Puis  $f'^{-1}(V_{d'}) \cap f''^{-1}(V_{d''})$  est un ouvert de  $A_1$ .  $\square$

**Remarque** À la fin de cette preuve, nous montrons que le quotient  $X/G$  est une variété. C'est en fait un phénomène général. On aurait pu en effet, dans la définition même d'un revêtement, supposer seulement que, soit l'espace total, soit la base est une variété et le démontrer pour l'autre espace. Pour la base, c'est analogue à ce que l'on vient de faire. Pour l'espace total, il suffit de prendre un point  $x$  dans  $X$ , de le projeté sur  $B$ , de choisir autour de  $\pi(x)$  un ouvert  $U$  qui est à la fois un ouvert de carte et un ouvert trivialisant (en prenant l'intersection), et, puisqu'il existe autour de  $x$  un ouvert  $V$  qui est homéomorphe à  $U$ , cela fournit une carte en  $x$ .

## Chemins et homotopies

**Proposition 2.2.9.** *Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement et soit  $f : Y \rightarrow B$  une application continue (on suppose  $Y$  connexe) admettant un relèvement  $\bar{f} : Y \rightarrow X$ . Pour toute application continue  $h : Y \times [0, 1] \rightarrow B$  telle que  $h(\cdot, 0) = f$ , il existe un relèvement  $\bar{h}$  de  $h$  tel que  $\bar{h}(\cdot, 0) = \bar{f}$ .*

**Preuve:** Le résultat est évident lorsque  $p$  est trivial car l'image de  $\bar{f}$  est alors contenu dans un ouvert de la forme  $B \times \{d\}$ , homéomorphe à  $B$ . La suite de la preuve vise à construire  $\bar{h}$  en recollant des morceaux obtenus dans les trivialisations locales du revêtement (pour lesquelles la remarque précédente s'applique). On procède en deux étapes : dans un premier temps, on fixe  $y$  et on raisonne en découpant l'intervalle  $[0, 1]$  en morceaux. Puis on recolle les différents  $h(U_y \times [0, 1])$ .

**Première Étape :** Soit  $y \in Y$ . Il existe un entier  $n_y$  et un voisinage  $U_y$  de  $Y$  tel que

$$h \left( U_y \times \left[ \frac{i-1}{n_y}, \frac{i+1}{n_y} \right] \right)$$

soit contenu dans un ouvert distingué  $V_{y,i}$  de  $B$ , voisinage de  $h \left( y, \frac{i}{n_y} \right)$  (on peut choisir  $n_y$  par compacité de  $[0, 1]$ ). On veut maintenant relever  $h$  dans  $V_{y,i}$ ; l'ennui c'est que ce relevé n'est pas unique. On procède alors par récurrence sur  $i$ , par recollement et on peut initialiser à l'aide du relevé de  $f$ . Soit donc  $\bar{g}_0$  un relèvement de  $h|_{U_y \times [0, \frac{1}{n_y}]}$  tel

que  $\bar{g}(z, 0) = \bar{f}(z)$ . Puis on construit  $\bar{g}_i$  par récurrence comme relevé de  $h|_{U_y \times [\frac{i-1}{n_y}, \frac{i+1}{n_y}]}$

tel que  $\bar{g}_i(z, \frac{i}{n_y}) = \bar{g}_{i-1}(z, \frac{i}{n_y})$  (on redémarre au même endroit dans la fibre). Noter que la construction est rendue possible car les ensembles  $U_y \times [\frac{i-1}{n_y}, \frac{i+1}{n_y}]$  s'intersectent. En recollant tous ces relevés, on obtient un relèvement  $\bar{g}_y$  de  $h|_{U_y \times [0, 1]}$  tel que  $\bar{g}_y(z, 0) = \bar{f}(z)$ .

**Deuxième étape :** Vérifions que l'on peut recoller les  $\bar{g}_y$ . Supposons donc qu'il existe  $y \neq y'$  tel que  $U_y \cap U_{y'} \neq \emptyset$  et montrons que  $\bar{g}_y$  est compatible avec  $\bar{g}_{y'}$ . Soit  $z \in U_y \cap U_{y'}$ . Par construction  $\bar{g}_y(z, 0) = \bar{g}_{y'}(z, 0) = \bar{f}(z)$ . On a alors deux relèvements de  $h|_{\{z\} \times [0, 1]}$  qui coïncident en un point : ils sont donc égaux ! Puisque  $z$  est quelconque, on conclut que  $\bar{g}_y$  et  $\bar{g}_{y'}$  coïncident sur  $U_y \cap U_{y'} \times [0, 1]$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.10.** 1. (existence de relevés de chemins). Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement. Pour tout chemin  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$  d'origine  $b$  et tout  $x \in p^{-1}(b)$ , il existe un unique chemin  $\bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\alpha(0) = x$  et  $p \circ \bar{\alpha} = \alpha$ .

(**Preuve :** Un chemin est une homotopie entre deux points.)

2. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont homotopes dans  $B$  et si  $\bar{\alpha}(0) = \bar{\beta}(0)$ , alors  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  sont homotopes dans  $X$ .

3. Le morphisme  $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$  est injectif.

La dernière propriété signifie que le groupe fondamental diminue lorsque l'on "monte" de  $B$  à  $X$ . C'est une propriété très importante de la théorie des revêtements : plus on est haut, moins il y a de topologie. Trouver un revêtement d'une variété  $B$ , c'est donc trouver une façon de "déplier"  $B$  pour en faire baisser la complexité topologique.

**Théorème 2.2.11** (du relèvement). Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement,  $Y$  une variété connexe et  $f : Y \rightarrow B$  une application continue. Soit  $y \in Y$ ,  $b = f(y)$  et  $x \in p^{-1}(b)$ . Alors, il existe un relèvement  $\bar{f}$  (nécessairement unique) tel que  $\bar{f}(y) = x$  si et seulement si

$$f_*(\pi_1(Y, y)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$$

La preuve de ce théorème est rédigée comme exercice.

## 2.2.4 Action du groupe fondamental de la base sur la fibre

Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement,  $b \in B$  et  $F = p^{-1}(b)$  la fibre. Prenons  $[g] \in \pi_1(B, b)$  et  $x \in F$ . Il existe un unique relevé  $\bar{\alpha}$  de  $g$  dans  $X$  tel que  $\bar{\alpha}(0) = x$ , d'après ce qui précède. De plus la classe de  $\alpha$  ne dépend que de la classe de  $g$  dans  $\pi_1(B, b)$ , i.e de  $[g]$ . On note  $x \cdot g = \bar{\alpha}(1)$ . Puisque  $p(\bar{\alpha}(1)) = g(1) = b$ , on sait que  $\bar{\alpha}(1) \in F$  et on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \pi_1(B, b) \times F &\longrightarrow F \\ ([g], x) &\longmapsto x \cdot g \end{aligned}$$

est une action (à droite).

**Proposition 2.2.12.** Le stabilisateur de  $x \in F$  pour l'action de  $\pi_1(B, b)$  sur la fibre  $F$  est  $p_*(\pi_1(X, x))$  (c'est-à-dire les lacets en bas qui proviennent de lacets en haut).

**Preuve:** C'est presque évident.

- Soit  $g \in \pi_1(B, b)$  qui fixe  $x$ . Alors son relevé est un lacet  $\bar{\alpha}$ . Puis  $p_*(\bar{\alpha}) = g$  donc  $\text{Stab}(x) \subset p_*(\pi_1(X, x))$ .
- Inversement, si  $g \in \pi_1(X, x)$  et si  $\beta$  est un représentant de  $g$ , alors  $\beta$  est le relevé de  $p \circ \beta$  par unicité. Il fixe bien  $x$ .

□

**Proposition 2.2.13.** On suppose  $B$  connexe. L'application qui à  $x \in F$  associe sa composante connexe dans  $X$  induit une bijection

$$F/\pi_1(B, b) \simeq \{\text{composantes connexe de } X\} = \pi_0(X).$$

Ce que dit cet énoncé, c'est que l'action de  $\pi_1(B, b)$  sur la fibre permet de visiter toute la composante connexe de  $x$  et ne permet pas d'en sortir.

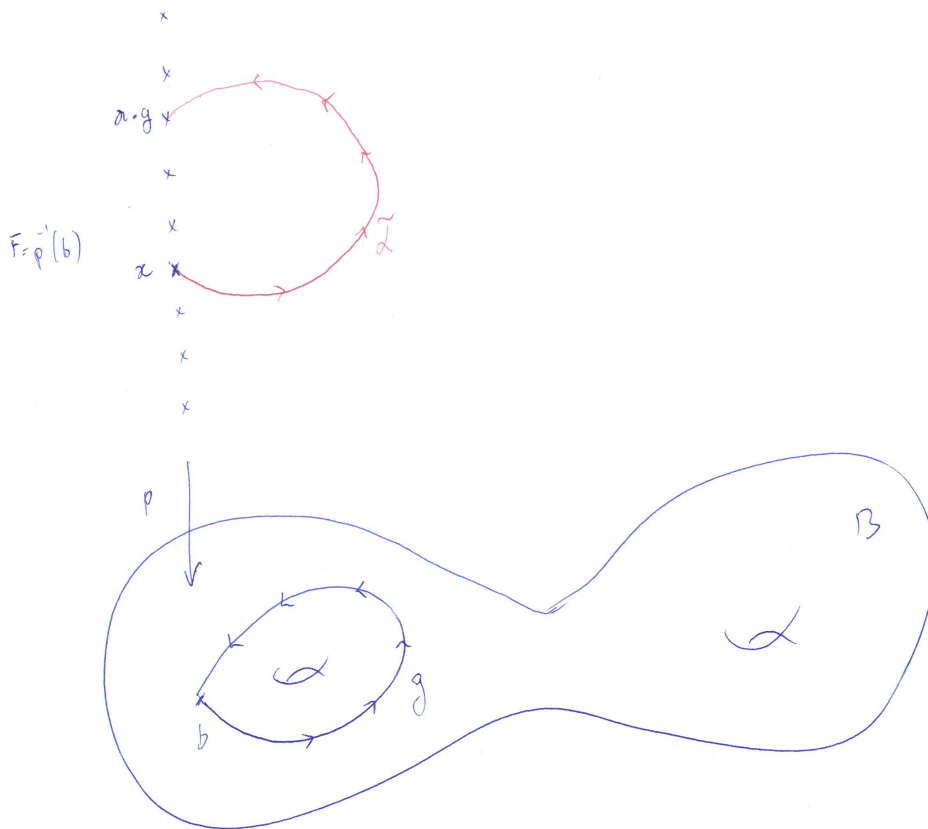


Figure 2.5: Action du groupe fondamental de la base sur la fibre

**Preuve:** • L'application  $F \rightarrow \pi_0(X)$  est surjective. En effet, soit  $y \in X$ . Il existe un chemin entre  $p(y)$  et  $b$  puisque  $B$  est connexe (et que connexe est équivalent à connexe par arcs pour des variétés). Le relèvement de ce chemin partant de  $y$  joint  $y$  à  $F$ .

- On montre ensuite que  $x$  et  $x'$  déterminent la même composante connexe si et seulement s'ils sont reliés par un relevé de  $\pi_1(B, b)$  (i.e  $x' = x \cdot g$ ). Ainsi, d'une part si  $x' = x \cdot g$ , alors il existe un chemin de  $x'$  à  $x$  par définition de l'action. D'autre part, s'il existe un chemin de  $\alpha$  de  $x'$  à  $x$ , alors  $[p \circ \alpha]$  convient (c'est bien la classe d'un lacet).

□

Ainsi, si l'on suppose  $X$  connexe, on sait maintenant que l'action de  $\pi_1(B, b)$  sur la fibre est transitive. Ajoutant à cela, la description du stabilisateur, on obtient :

**Corollaire 2.2.14.** *On suppose  $X$  connexe. Alors*

$$F = \pi_1(B, b) / p_*(\pi_1(X, x))$$

Puis, en particulier,

**Corollaire 2.2.15.** *Si  $X$  est connexe, alors  $p$  est un homéomorphisme si et seulement si  $p_*(\pi_1(X, x)) \rightarrow \pi_1(B, b)$  est un isomorphisme de groupes (on sait déjà qu'il est injectif, sa surjectivité aurait donc suffi).*

Ainsi donc, pour deux variétés en situation de revêtement, le groupe fondamental détermine complètement la classe d'homéomorphie (en particulier, le type d'homotopie et le type d'homéomorphie coïncident).

**Corollaire 2.2.16.** *Un revêtement connexe par arcs d'un espace simplement connexe est un homéomorphisme*

On ne peut donc pas monter plus haut qu'un espace simplement connexe.

Terminons ce paragraphe en présentant une méthode pour calculer des groupes fondamentaux de variétés. Supposons qu'un groupe discret agisse proprement et librement sur une variété *simplement connexe*  $X$  et soit  $B = G \backslash X$  la variété quotient. Alors  $\pi_1(B, b) = G$ . En effet, la fibre de  $p : X \rightarrow X/G$  est  $G$ .

**Exemple** La variété  $\mathbb{R}$  est simplement connexe (car contractile) et  $\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{R}$  proprement et librement. Le quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est homéomorphe au cercle  $\mathbb{S}^1$ . On obtient donc

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

De même pour les tores :  $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$  ou encore pour les espaces projectifs : puisque  $\mathbb{S}^n$  est simplement connexe et que  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$  est un revêtement, on obtient

$$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

### 2.2.5 Revêtement universel

On sait maintenant que si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, alors  $\pi_1(X)$  s'injecte dans  $\pi_1(B)$ . Par ailleurs si  $B$  est simplement connexe, tout revêtement de  $B$  est un homéomorphisme. Inversement, on montre dans cette section qu'il existe toujours un revêtement simplement connexe pour toute variété et que ce revêtement revêt tous les revêtements de la variété.

**Définition 2.2.17.** *Soit  $B$  une variété connexe. Un revêtement universel de  $B$  est un revêtement  $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$  d'espace totale  $\tilde{B}$  connexe et vérifiant la condition suivante : pour tout revêtement  $p : X \rightarrow B$  avec  $X$  connexe et pour tous  $b \in \tilde{B}$  et  $x$  tel que  $\tilde{\pi}(b) = p(x)$ , il existe un morphisme de revêtement  $\Phi : \tilde{B} \rightarrow X$  tel que  $\Phi(b) = x$ .*

- Remarque**
1. Le morphisme  $\Phi$  est unique (car il est l'unique relevé de son projeté).
  2. Un revêtement universel est unique (en prendre deux et montrer que les applications  $\Phi$  correspondantes sont inverses l'une de l'autre).
  3. Un revêtement simplement connexe est universel (d'après le théorème du relèvement).

Le théorème suivant est délicat mais très important.

**Théorème 2.2.18.** *Soit  $B$  une variété (séparée) connexe. Alors  $B$  admet un revêtement universel,*

**Preuve:** Soit  $b \in B$  et soit  $\tilde{B}$  l'ensemble des classes d'homotopies à extrémités fixées de chemins dans  $B$  d'origines  $b$ . On a une application

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi} : \tilde{B} & \longrightarrow & B \\ [\beta] & \longmapsto & \beta(1) \end{array}.$$

Tout revient à vérifier que c'est un revêtement universel.

L'application  $\tilde{\pi}$  est surjective car  $B$  est connexe par arcs. On munit  $\tilde{B}$  de la topologie (quotient de la topologie) compacte ouverte. Il suit que  $\tilde{\pi}$  est continue. Le groupe (discret)  $G = \pi_1(B, b)$  agit sur  $\tilde{B}$  par

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{B} & \longrightarrow & \tilde{B} \\ ([\alpha], [\beta]) & \longmapsto & [\alpha \cdot \beta] \end{array}$$

□

Cette action est continue car  $\pi_1(B, b)$  est discret et libre car si  $[\alpha \cdot \beta] = [\beta]$ , alors  $[\alpha]$  est la classe du lacet constant (procéder comme lorsque l'on montrait que le  $\pi_1$  est un groupe). Les orbites de  $G$  sont exactement les fibres de  $\tilde{\pi}$  car on ne change pas l'extrémité du chemin lorsque l'on fait agir  $G$  et si  $\tilde{\pi}([\beta']) = \tilde{\pi}([\beta])$ , alors  $\beta' \beta^{-1} \in G$ . Donc  $\tilde{\pi}$  induit par passage au quotient, une application  $f : G \backslash \tilde{B} \rightarrow B$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & & \\ p \downarrow & \searrow \tilde{\pi} & \\ G \backslash \tilde{B} & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

et  $f$  est continue (par définition de la topologie quotient) et bijective (par le théorème de factorisation).

La stratégie de preuve devient maintenant claire. Il faut montrer que  $f$  est un homéomorphisme et que  $p$  est un revêtement. Pour ce dernier point, on utilise les critères généraux dans la situation d'une action de groupes : il s'agit de voir que l'action est propre et libre (ce qu'on a déjà fait). Enfin, il faudra montrer que  $\tilde{B}$  est simplement connexe, ce qui assurera que c'est un revêtement universel.

On montre simultanément que l'action est propre et que  $f$  est un homéomorphisme.

**Lemme 2.2.19.** *Pour tout  $[\beta]$  dans  $\tilde{B}$ , il existe un voisinage ouvert  $O = O_{[\beta]}$  de  $[\beta]$  tel que*

- *Pour tout  $g \in G$ , si  $O \cap gO$  est non vide, alors  $g = e$ .*
- *$\tilde{\pi}(O)$  est ouvert dans  $B$ .*

**Preuve:** Soit donc  $[\beta]$  dans  $\tilde{B}$ . Par compacité de  $[0, 1]$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  et des ouverts  $V_i$  tels que

- (i) Tout lacet dans  $V_i$  est homotope au lacet constant ( $B$  est une variété donc localement  $\mathbb{R}^n$ , donc localement simplement connexe).
- (ii)  $\beta \left( \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right) \subset V_i$ .

Soit  $O'$  l'ouvert de l'espace des chemins dans  $B$  d'origines  $b$  formé des chemins  $\beta'$  tels que  $\beta' \left( \left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right) \subset V_i$  et  $\beta' \left( \frac{i}{n} \right)$  appartienne à la même composante connexe par arcs que  $\beta \left( \frac{i}{n} \right)$  dans  $V_i \cap V_{i-1}$  (les composantes connexes par arcs sont ouvertes donc la condition est ouverte). Soit  $\beta'$  et  $\beta''$  dans  $O'$  tels que  $\beta'(1) = \beta''(1)$ . Soit, pour tout  $i$  un chemin  $\gamma_i$  dans  $V_i \cap V_{i-1}$  joignant  $\beta' \left( \frac{i}{n} \right)$  à  $\beta'' \left( \frac{i}{n} \right)$  (et  $\gamma_0, \gamma_n$  constants). Pour simplifier (un peu) les notations, on pose  $\beta''_i = \beta|_{\left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]}$ . Soit  $c$  le chemin

$$c = (\gamma_0 \cdot \beta''_0 \cdot \gamma^{-1}) (\gamma_1 \cdot \beta''_1 \cdot \gamma_2^{-1}) \cdots (\gamma_{n-1} \cdot \beta''_{n-1} \cdot \gamma_n^{-1}).$$

Alors  $\beta'' \sim c \sim \beta'$ .

On conclut que deux chemins dans  $B$  suffisamment proches et ayant mêmes extrémités sont homotopes. Cela justifie de considérer  $O$ , l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de  $O'$ . Cet ensemble  $O$  est ouvert (car le saturé de  $O$  est égal à  $O'$  qui est ouvert). Montrons que  $O$  convient. Soit  $g \in G$  et  $[\beta'], [\beta''] \in O$  tel que  $[\beta'] = g[\beta']$ . Alors  $\beta'(1) = \beta''(1)$  et en fait  $[\beta'] = [\beta'']$ . Comme  $G$  agit librement, cela n'est possible que si  $g = e$ . Enfin, il est clair que  $\tilde{\pi}(O) = V_{n-1}$ .

**Lemme 2.2.20.** *L'application  $\tilde{\pi}$  est ouverte,  $\tilde{B}$  est séparée, l'action de  $G$  sur  $\tilde{B}$  est propre et  $f$  est un homéomorphisme.*

**Preuve:** •  **$\tilde{\pi}$  est ouverte :** c'est une application directe du lemme précédent.

- **$\tilde{B}$  est séparée :** Soit  $x$  et  $y$  dans  $\tilde{B}$ . Si  $\tilde{\pi}(x) \neq \tilde{\pi}(y)$ , alors  $x$  et  $y$  ont des voisinages distincts car  $B$  est séparée et  $\tilde{\pi}$  est continue. Si  $\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(y)$ , alors il existe  $g \in G$  tel que  $y = gx$ . Donc  $O_x$  et  $O_gx$  sont des voisinages distincts d'après le lemme précédent (sauf si  $g = e$ , auquel cas  $x = y$ ).
- **L'action est propre :** On rappelle qu'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est propre si et seulement si  $f$  est fermée et l'image réciproque d'un point est compacte. On considère alors l'application  $\text{gr} : G \times \tilde{B} \rightarrow \tilde{B} \times \tilde{B}$  comme avant. L'image réciproque d'un point est un point car l'action est libre. Pour la deuxième condition, on commence par constater que  $G \backslash \tilde{B}$  est séparé car  $f$  est continue et bijective et que  $B$  est séparé (c'est comme pour montrer que  $\tilde{B}$  est séparé en utilisant la continuité de  $\tilde{\pi}$ ). Donc la diagonale de  $G \backslash \tilde{B} \times G \backslash \tilde{B}$  est fermée. Puis l'image de  $\text{gr}$  (qui est  $(p \times p)^{-1}(\Delta)$  où  $p$  est la projection de  $\tilde{B}$  sur  $G \backslash \tilde{B}$  et  $\Delta$  la diagonale) est fermée. D'autre part on peut expliciter l'application  $\text{gr}^{-1}$  : c'est

$$\begin{aligned} \text{gr}^{-1} : \quad \text{Im}(\text{gr}) &\longrightarrow G \times \tilde{B} \\ ([\beta], [\beta']) &\longmapsto ([\beta'\beta^{-1}], [\beta]) \end{aligned}$$

et elle est continue. On conclut que  $\text{gr}$  est fermée.

- **$f$  est ouverte :** On vient de voir que en particulier que  $p : \tilde{B} \rightarrow G \backslash \tilde{B}$  est un revêtement donc en particulier un homéomorphisme local et en tout cas ouverte. Puisque  $\tilde{\pi}$  est continue, on en déduit que  $f$  est ouverte donc un homéomorphisme  $\square$

Il ne reste plus qu'à montrer que  $\tilde{B}$  est simplement connexe. Il faut déjà voir que  $\tilde{B}$  est connexe par arcs. Pour cela, soit  $c$  un chemin d'origine  $b$  et montrons que  $c$  peut être relié à  $c_b$  le lacet constant en  $b$ . Pour cela on considère le chemin dans  $\tilde{B}$  (un chemin de chemins...) donné par

$$(s, t) \mapsto c(st)$$

(c'est-à-dire que l'on parcourt de moins en moins de portion de chemin  $c$ ). Ceci est bien un chemin d'origine  $c_b$  et d'extrémité  $c$ .

Enfin, soit  $\gamma$  un lacet basé en  $[c_b]$  dans  $\tilde{B}$ . On va contracter  $\gamma$  sur  $[c_b]$ . L'argument est simple mais abstrait (une homotopie est un chemin de chemins de chemins...) Pour faire ça, on utilise la propriété de relevé des chemins maintenant que l'on sait que l'on a situation de revêtement  $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$  : on projette  $\gamma$  dans  $\tilde{B}$ , on a donc un vrai chemin dans  $B$ , que l'on peut relever. Ce relevé est l'homotopie voulue. Plus explicitement, pour chaque chemin  $c$ , d'origine  $b$ , on note  $t \mapsto [c_t]$  le relèvement de  $c$  d'origine  $[c_b]$ . Puisque  $\gamma$  est le relèvement de  $\tilde{\pi} \circ \gamma$  d'origine  $[c_b]$ , on a par unicité, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\gamma(t) = [(\tilde{\pi} \circ \gamma)_t]$$

Alors,

$$H(s, t) = [((\tilde{\pi} \circ \gamma)_t)_s]$$

est une homotopie entre  $[c_b]$  et  $\gamma$ .  $\square$

### 2.2.6 Théorie de Galois des revêtements

La théorie des revêtements est une théorie bien aboutie puisque l'on parvient à classifier tous les revêtements (connexes) au dessus d'une base fixée. Ce théorème de classification ressemble beaucoup à la classification des extensions de corps au-dessus d'un corps fixé.

Rappelons en effet que la théorie de Galois classique consiste à montrer que l'on peut classer les sous-extensions d'une extension

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ k \end{array}$$

à l'aide des sous-groupes de  $\text{Aut}_k(K)$ . On montre qu'il y a une bijection entre l'ensemble des extensions  $L$  (respectivement galoisiennes) avec

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ & | & \\ L & & \\ & | & \\ & k & \end{array}$$

et les sous-groupes de  $\text{Aut}_k(K)$  (respectivement les sous-groupes distingués).

Dans ce paragraphe, on montre qu'il existe une correspondance analogue dans le contexte de

$$\begin{array}{c} X \\ \pi \downarrow \\ B \end{array}$$

un revêtement. Notre objectif est de trouver une bijection entre les revêtements  $p : X \rightarrow B$  tels que

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{B} & \\ \Phi \swarrow & \downarrow \tilde{\pi} & \\ X & & B \\ & \searrow p & \end{array}$$

et les sous-groupes de  $\pi_1(B)$  et de préciser quelle classe d'objet correspond aux sous-groupes distingués. L'application  $\Phi$  fait référence à la définition du revêtement universel.

**Remarque** Dans ce contexte, le revêtement universel joue le rôle de la clôture algébrique d'un corps  $k$ .

### écrire les preuves

**Théorème 2.2.21.** Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement avec  $X$  connexe et soit  $x \in X$ ,  $b = p(x)$  et  $F = p^{-1}(b)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'action de  $\text{Aut}(p)$  sur  $F$  est transitive.
- (ii)  $p_*(\pi_1(X, x))$  est distingué dans  $\pi_1(B, b)$ .
- (iii)  $p_*(\pi_1(X, y)) = p_*(\pi_1(X, z))$  pour tout  $y, z \in F$ .
- (iv) Pour tout lacet  $\alpha$  de  $B$  en  $b$ , ou bien tout relèvement de  $\alpha$  est un lacet, ou bien aucun relèvement de  $\alpha$  n'est un lacet.
- (v) Il existe un groupe (discret)  $\Gamma$  agissant librement et proprement sur  $X$  et un homéomorphisme  $f : \Gamma \backslash X \rightarrow B$



On dit alors (par analogie) que le revêtement est galoisien. L'équivalence entre (ii) et (v) est la plus importante et correspond à la caractérisation géométrique que nous cherchions : un revêtement  $p : X \rightarrow B$  est galoisien si  $B$  s'obtient comme l'espace des orbites d'un groupe discret agissant sur  $X$ .

## 2.3 Exercices corrigés pour le chapitre 2

### Énoncés des exercices

**Exercice 2.1** Montrer qu'une variété contractile est simplement connexe. Discuter la réciproque.

#### Exercice 2.2 (Homéomorphismes locaux et revêtements)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On dit que  $f$  est un homéomorphisme local si pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  soit un homéomorphisme.

1. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , que  $f$  est différentiable et que, pour tout  $x \in X$ ,  $d_x f$  est inversible. Quel théorème affirme que  $f$  est un homéomorphisme local ?
2. On suppose que  $f$  est un revêtement. Montrer que  $f$  est un homéomorphisme local.

On cherche ensuite des conditions qui permettent de conclure à la réciproque.

3. Montrer que la réciproque est fausse en général.
4. On suppose que  $f$  est un homéomorphisme local et l'une des deux conditions suivantes
  - (i) Le cardinal de chaque fibre  $f^{-1}(y)$  est fini constant non nul.
  - (ii)  $f$  est propre et  $Y$  est connexe.

Montrer qu'alors  $f$  est un revêtement.

#### Exercice 2.3 (Séparabilité, exemples)

1. Montrer que si  $X$  et  $G$  sont séparés (de Hausdorff) et si  $G$  agit proprement sur  $X$ , alors les orbites sont fermées et l'espace des orbites  $X/G$  est séparé.
2. On suppose le groupe  $G$  fini (et discret) et l'action sur  $X$  libre. Montrer que la projection canonique  $X \rightarrow X/G$  est un revêtement à  $\text{card}(G)$  feuillets.
3. En déduire que  $\mathbb{RP}^n$  est revêtu par la sphère. Qu'appelle-t-on un espace lenticulaire ?
4. Soit  $H$  un sous-groupe discret d'un groupe topologique séparé  $G$ . Montrer que  $H$  est fermé et la projection canonique  $G \rightarrow G/H$  est un revêtement.
5. En déduire que  $\mathbb{R}^n$  revêt le tore.

**Exercice 2.4 (Construction de surfaces hyperboliques)**

Soit  $g \geq 2$  un entier.

- Soit  $\Sigma_g$  la surface topologique orientable de genre  $g$  (i.e. la somme connexe de  $g$  tores). Montrer que  $\Sigma_g$  se réalise comme quotient d'un  $4g$ -gones par des identifications de faces (faire un dessin en s'inspirant du tore).
- Dans le disque de Poincaré  $\mathbb{D}$ , montrer qu'il existe un polygone hyperbolique régulier  $P$  à  $4g$  côtés dont tous les angles intérieurs valent  $\theta = \frac{\pi}{2g}$ .
- Soient  $p_1^1, \dots, p_4^1, \dots, p_1^g, \dots, p_4^g$  les  $4g$  sommets de  $P$ . Montrer qu'il existe  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}$  des isométries hyperboliques telles que  $\sigma_{2i-1}(p_1^i) = p_4^i$ ,  $\sigma_{2i-1}(p_2^i) = p_3^i$  et  $\sigma_{2i}(p_2^i) = p_1^{i+1}$ ,  $\sigma_{2i}(p_3^i) = p_4^i$  pour  $i = 1, \dots, g$ .
- Soit  $H := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{2g} \rangle < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $H$  est discret et agit proprement sur  $\mathbb{D}$ . En déduire que la projection canonique  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/H$  est le revêtement universel de  $H$ .
- Montrer que  $\Sigma_g$  peut être munie d'une métrique localement hyperbolique.

**Exercice 2.5 (Groupe fondamental du cercle et applications)**

- Quels théorèmes du cours permettent de montrer les deux faits suivants :
  - Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  est une application continue, pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(0) = e^{2i\pi t_0}$ , il existe une et une seule application continue  $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{f}(0) = t_0$  et  $f(t) = e^{2i\pi \tilde{f}(t)}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .
  - Si  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  et si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue telle que  $h(0, t) = e^{2i\pi f(t)}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors il existe une application  $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(0, t) = \tilde{f}(t)$  et  $h(s, t) = e^{2i\pi \tilde{h}(s, t)}$ .
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ , l'application  $\varphi_x : \pi_1(\mathbb{S}^1, x) \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(0) - \tilde{\gamma}(1)$  où  $\tilde{\gamma}$  est un relevé de  $\gamma$  est un isomorphisme de groupes.  
 Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $x$  un point de  $\mathbb{S}^1$ . Posons  $y = f(x)$ . La composition des morphismes de groupes  $\varphi_x^{-1} \circ f_* \circ \varphi_y$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, y) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est un morphisme de groupes de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . C'est donc la multiplication par un entier, qui ne dépend pas de  $x$  d'après ce qui précède. On le note  $\deg(f)$  et on l'appelle degré de l'application  $f$ .

- Calculer le degré d'une rotation et de l'application  $z \mapsto z^n$ .
- Montrer que  $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$ . En déduire que si  $f$  est un homéomorphisme alors  $\deg(f) = \pm 1$ .
- Montrer que  $\deg(f) = \deg(g)$  si et seulement si  $f$  et  $g$  sont homotopes. En déduire que  $\deg(f) = 0$  si et seulement si  $f$  se prolonge continûment en une application  $f' : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ .
- Montrer qu'il n'existe pas de rétraction de  $\mathbb{B}^2$  dans  $\mathbb{S}^1$ .
- En déduire le théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.

**Exercice 2.6 Théorème du relèvement**

Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement,  $Y$  une variété connexe et  $f : Y \rightarrow B$  une application continue. Soit  $y \in Y$ ,  $b = f(y)$  et  $x \in p^{-1}(b)$ . Montrer qu'il existe une application  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  (nécessairement unique) telle que  $p \circ \tilde{f} = f$  si et seulement si

$$f_*(\pi_1(Y, y)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$$

En déduire qu'un revêtement simplement connexe est universel.

**Exercice 2.7 (Classification des revêtements du cercle)**

Trouver tous les revêtements à isomorphisme près d'espace totaux connexes et de base le cercle  $\mathbb{S}^1$ . Pourquoi sont-ils tous galoisiens ?

**Exercice 2.8 (Revêtements de bouquets)**

- (a) Trouver tous les revêtements d'espaces totaux connexes et à 2 feuillets du bouquet de  $k$  cercles. Lesquels sont galoisiens ?
- (b) Trouver tous les revêtements d'espace totaux connexes à 3 feuillets du bouquet de deux cercles. Lesquels sont galoisiens ?
- (c) Construire un revêtement universel du bouquet de deux cercles.

**Remarque** Le bouquet de plus deux cercles n'est pas une variété...mais ça n'est pas bien grave.

**Corrigés des exercices (ou référence)**

**Exercice 2.1**

**Exercice 2.2**

**Exercice 2.3**

**Exercice 2.4**

**Exercice 2.5**

**Exercice 2.6**

**Exercice 2.7**

**Exercice 2.8**

## Chapter 3

# Variétés hyperboliques

### 3.1 Qu'est-ce qu'une variété hyperbolique

#### 3.1.1 Introduction

Une variété est un espace topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  satisfaisant à la condition (de recollement) suivante

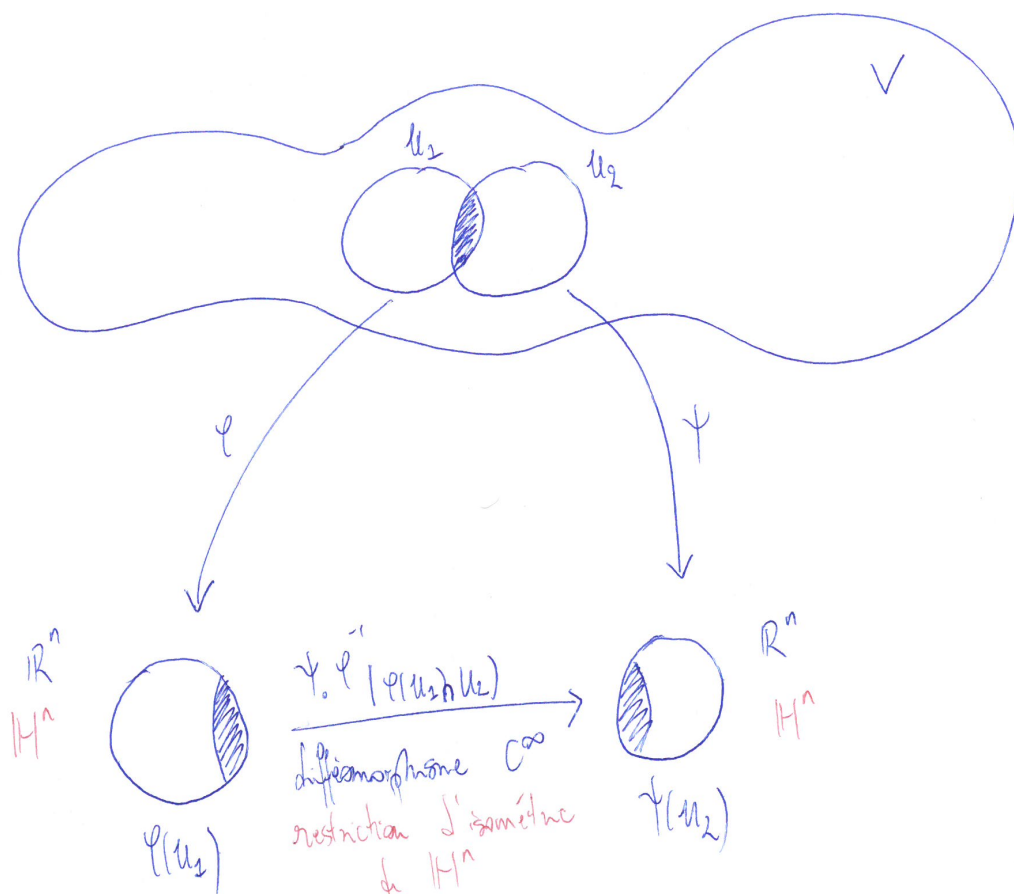


Figure 3.1: Une variété **hyperbolique**

Une variété hyperbolique est un raffinement de la notion de variété : les ouverts  $\varphi(U_1)$  et  $\varphi(U_2)$  sont maintenant des ouverts de  $\mathbb{H}^n$  (ce qui n'est pas une restriction

mais plutôt une convenance psychologique) et les changements de cartes sont données par des isométries de  $\mathbb{H}^n$ . Une variété hyperbolique est donc un collage lisse de petits morceaux de l'espace hyperbolique. C'est en fait un cas particulier de ce qu'on appelle une  $(G, X)$ -structure

### 3.1.2 $(G, X)$ -structure ou structure géométrique

Dans les années 1870, F. Klein propose une vision différente de la géométrie, très attachée à la notion de groupe. pour Klein, une géométrie est l'ensemble des invariants sous l'action d'un groupe de transformations donné. Son programme de recherche visant à clarifier cette notion est connu sous le nom de programme d'Erlangen.

Par exemple, si on pense à la sphère  $\mathbb{S}^2$  comme l'espace homogène  $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})/\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ , on fait de la géométrie sphérique, tandis que si on pense à  $\mathbb{S}^2$  comme  $\text{PO}(3, 1)/\text{Stab}(\xi)$  où  $\xi$  est un point à l'infini de l'espace hyperbolique, alors on fait de la géométrie conforme. Ou encore si  $\mathbb{R}^n - \{0\} = \text{GL}_n(\mathbb{R})/(\text{GL}_{n-1}(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{n-1})$ , c'est le lieu de l'algèbre linéaire mais si  $\mathbb{R}^n = \text{O}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n/\text{O}_n(\mathbb{R})$ , c'est plutôt le lieu de la géométrie euclidienne.

Le but de cette section est de définir proprement cette notion. Soit alors  $X$  une variété connexe et  $G$  un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de  $X$ . Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le groupe  $G$  n'est pas trop gros, au sens suivant :

**Définition 3.1.1.** *On dit que  $G$  agit analytiquement sur  $X$  si pour tout couple  $g_1, g_2$  de  $G$  et tout ouvert  $U$  de  $X$ , si  $g_{2|U} = g_{1|U}$ , alors  $g_1 = g_2$ .*

On construira plus tard un objet par prolongement analytique et cette hypothèse sera nécessaire.

On suppose donc dorénavant que  $G$  agit analytiquement et transitivement sur  $X$ .

**Définition 3.1.2** ( $(G, X)$ -structure ou structure géométrique). *Soit  $V$  une variété différentiable. Une  $(G, X)$ -structure sur  $V$  est la donnée d'un atlas de cartes  $\varphi_i : V_i \rightarrow X$  tel que*

- Les  $V_i$  sont ouverts et recouvrent  $V$ .
- Les  $\varphi_i$  sont des difféomorphismes sur leurs images.
- Tout changement de cartes  $f_{ij} : \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_j(V_i \cap V_j)$  est la restriction de l'action de  $G$

On dit aussi que  $V$  est une  $(G, X)$ -variété.

#### Exemple

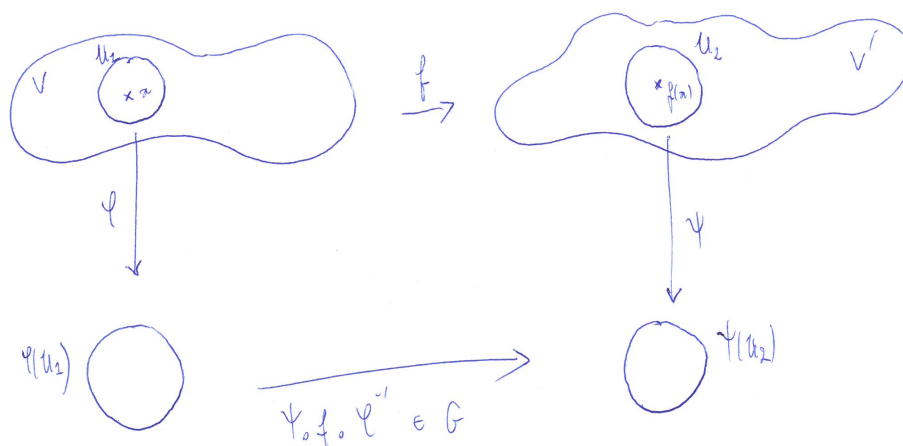
Structure	Espace	Groupe
Euclidienne	$\mathbb{R}^n$	$\text{O}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$
Sphrique	$\mathbb{S}^n$	$\text{O}_{n+1}(\mathbb{R})$
Hyperbolique	$\mathbb{H}^n$	$\text{PO}(n, 1)$
Affine	$\mathbb{R}^n$	$\text{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$

**Définition 3.1.3.** *Soit  $V$  et  $V'$  deux  $(G, X)$ -variétés. Un  $(G, X)$ -morphisme  $f : V \rightarrow V'$  est un difféomorphisme local qui est donné via les cartes par des restrictions d'éléments de  $G$*

Précisément, pour tout point  $x \in V$ , il existe un ouvert  $U_1$  contenant  $x$ , un ouvert  $U_2$  contenant  $f(x)$  et des difféomorphismes sur leurs images  $\psi : U_2 \rightarrow X$  et  $\varphi : U_1 \rightarrow X$  tels que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

est la restriction d'un élément de  $G$  à  $\varphi(U_1)$ .


 Figure 3.2: Morphisme de  $(G, X)$ -structure

### 3.1.3 Développante et holonomie

Soit  $V$  une  $(G, X)$ -variété. Nous allons construire une application  $D : \tilde{V} \rightarrow X$  qui est un morphisme de  $(G, X)$ -structure et qui aidera à comprendre la structure de  $V$ . Cette application est par construction un difféomorphisme local mais son comportement global peut être très compliqué.

**Proposition 3.1.4.** *Il existe un  $(G, X)$ -morphisme  $D : \tilde{V} \rightarrow X$ . Tout autre  $(G, X)$ -morphisme est de la forme  $g \circ D$  où  $g \in G$ .*

**Preuve:** On utilise les deux idées suivantes :

1. Localement  $\tilde{V}$  ressemble à  $V$  et on peut construire  $D$  avec une carte.
2. On utilise ensuite l'hypothèse d'analyticité et une sorte de prolongement analytique.

#### Existence

Soit  $v_0 \in \tilde{V}$ . On choisit une carte de la  $(G, X)$ -structure,  $\varphi_0 : V_0 \rightarrow X$  autour de  $v_0$  (voir exercice [ref](#)). L'application recherchée coïncidera avec  $\varphi_0$  sur  $V_0$  et on cherche à la prolonger. Pour cela, on note qu'il existe une suite de cartes  $\varphi_i : V_i \rightarrow X$  telle que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i = \tilde{V} \quad \text{et} \quad V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset.$$

Par définition de  $(G, X)$ -structure, il existe, pour chaque  $i$ , un élément  $g_i \in G$  tel que

$$\varphi_{i-1} = g_i \circ \varphi_i$$

sur l'intersection  $V_{i-1} \cap V_i$  (le changement de cartes est donné par  $g_i$ ). Pour  $v \in V_i$ , on pose

$$D(v) = g_1 \circ g_2 \cdots g_i(\varphi_i(v)).$$

Cette application est bien définie. En effet, si  $v \in V_i \cap V_{i'}$  (disons  $i < i'$ ), alors

$$g_{i+1} \cdots g_{i'}(\varphi_{i'}(v)) = \varphi_i(v)$$

par définition des  $g_i$ .

#### Unicité

On montre en fait le lemme

**Lemme 3.1.5.** *Soit  $W$  une  $(G, X)$ -variété connexe. Deux  $(G, X)$ -morphisms  $\varphi, \varphi'$  à valeurs dans  $X$  qui coïncident sur un ouvert non vide, coïncident en fait sur tout  $W$ .*

**Preuve:** Soit

$$A = \{w \in W \text{ tel que } \varphi = \varphi' \text{ dans un voisinage de } w\}$$

Par construction  $A$  est ouvert et par hypothèse,  $A$  est non vide. On veut montrer que  $A$  est aussi fermé. Soit donc  $w$  un point de l'adhérence de  $A$ . Dans une carte  $\psi : U \rightarrow X$  autour de  $w$ ,  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont représentés par des éléments  $g$  et  $g'$  de  $G$ .

Mais  $g$  et  $g'$  coïncident sur  $\psi(U \cap A)$  qui est non vide car  $w$  est adhérent à  $A$ . Donc  $g = g'$  (hypothèse d'analyticité). Ainsi  $\varphi$  et  $\varphi'$  coïncident au voisinage de  $w$ .  $\square$

Une conséquence directe de ce lemme est que si  $D$  et  $D'$  sont deux  $(G, X)$ -morphisms, alors, au voisinage de  $v_0$ ,  $D' = g \circ D$  pour un certain  $g \in G$ , d'où l'on conclut que  $D' = g \circ D$  partout sur  $\tilde{V}$ .  $\square$

Notons  $\Gamma = \pi_1(V)$ . Ce groupe agit sur  $\tilde{V}$  ("action du groupe fondamental de la base sur la fibre").

**Corollaire 3.1.6.** *Il existe un morphisme de groupes  $h : \Gamma \rightarrow G$  tel que, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,*

$$D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D.$$

**Preuve:**  $D$  et  $D \circ \gamma$  sont deux  $(G, X)$ -morphisms : ils diffèrent d'un élément de  $h(\gamma) \in G$ . On vérifie facilement que  $h$  est un morphisme de groupes.  $\square$

**Définition 3.1.7.** *On dit que  $h$  est le morphisme d'holonomie de  $(G, X)$ -structure.*

Par analogie, on appelle parfois l'action de  $\pi_1(V)$  sur  $\tilde{V}$ .

### 3.1.4 Complétude

On suppose dans cette section que  $X$  est simplement connexe. Les exemples importants de  $(G, X)$ -structure sont celles qui sont revêtues par  $X$ .

**Lemme 3.1.8.** *Soit  $\Gamma$  un groupe agissant librement et discontinûment sur  $X$  de sorte que  $\Gamma$  est en fait un sous-groupe de  $G$ . Alors  $\Gamma \backslash X$  est aussi munie d'une  $(G, X)$ -structure.*

**Preuve:** On sait déjà que  $\pi : X \rightarrow \Gamma \backslash X$  est un revêtement (c'est même le revêtement universel). Mais une petite difficulté survient : en choisissant un ouvert trivialisant dans  $\Gamma \backslash X$ , qui est donc difféomorphe à un ouvert de  $X$ , on ne construit pas tout de suite une carte de  $(G, X)$ -variété. Rappelons en effet que les ouverts trivialisants sont les ouverts  $\pi(V_x)$  où, pour chaque point  $x$ ,  $V_x$  est construit de sorte que, pour tout  $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ ,

$$\gamma(V_x) \cap V_x = \emptyset.$$

Prenons donc deux ouverts trivialisants qui s'intersectent, disons  $\pi(V_x) \cap \pi(V_y) \neq \emptyset$ . Il se peut qu'il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $V_y$  intersecte à la fois  $V_x$  et  $\gamma(V_x)$  (il peut même exister plusieurs tels  $\gamma$ ).

Or, parmi toutes les intersections  $\gamma(V_x) \cap V_y$ , il y en a une qui est difféomorphe à  $\pi(V_x) \cap \pi(V_y)$ . Le changement de carte est alors donné par  $\gamma^{-1}$ .  $\square$

**Définition 3.1.9.** *On dit qu'une  $(G, X)$ -structure sur  $V$  est complète si la développante  $D : \tilde{V} \rightarrow X$  est un homéomorphisme (auquel cas  $V$  est le quotient de  $X$  par une action libre et discrète de son groupe fondamental).*

Lorsque l'on écrit  $V = \Gamma \backslash X$ , on dit parfois que l'on a uniformisé la  $(G, X)$ -structure.

La fin de ce paragraphe est hors-programme parce qu'elle utilise des notions de géométrie riemannienne (voir cependant l'exercice [ref et aussi Ratcliffe pour le cas général](#)).

Le premier théorème peut s'énoncer de manière à cacher la présence de la géométrie riemannienne. C'est cette version qui est détaillée en exercice.

**Théorème 3.1.10.** *Toute  $(\text{Isom}(\mathbb{H}^n), \mathbb{H}^n)$ -structure sur une variété compacte est complète.*

Mais on peut faire un peu mieux.

**Définition 3.1.11** ( $(G, X)$ -structure métrique). *Une  $(G, X)$  variété métrique  $G$  est une  $(G, X)$ -variété où  $X$  est une variété riemannienne et  $G$  est un sous-groupe du groupe des isométries de  $X$*

Une  $(G, X)$ -variété métrique est naturellement munie d'une métrique riemannienne si on impose que les cartes soient des isométries et cette condition détermine une unique métrique.

On suppose donc que  $X$  est une variété riemannienne (toujours simplement connexe) et que  $G$  est un sous-groupe du groupe des isométries de  $X$ . C'est bien sûr le cas de l'espace hyperbolique  $X = \mathbb{H}^n$  avec le groupe  $G = \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . La version la plus générale d'uniformisation est la suivante.

**Théorème 3.1.12.** *Soit  $V$  une  $(G, X)$ -variété métrique. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $V$  est complet en tant qu'espace métrique.
2.  $V$  est complète comme  $(G, X)$ -structure.

## 3.2 Groupes kleinien

**Définition 3.2.1.** *Un sous-groupe kleinien est un sous-groupe discret de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  (en dimension 2, on dit aussi un groupe fuchsien).*

Le fait de s'intéresser à des groupes kleinien a été justifié au paragraphe précédent : considérer l'espace des orbites d'un groupe kleinien (qui agit proprement discontinûment) est en effet l'unique moyen de construire des variétés hyperboliques complètes. Le but de ce paragraphe est de montrer que le caractère discret du groupe se lit sur son action sur  $\mathbb{H}^n$  et inversement. En particulier, nous prouvons que l'action d'un groupe discret sans éléments elliptiques donne une situation de revêtement  $\mathbb{H}^n \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ .

**Remarque** Un groupe  $\Gamma$  est discret si et seulement si

$$(T_n \in \Gamma, T_n \rightarrow \text{Id}) \Leftrightarrow T_n = \text{Id} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

En effet grâce à la structure de groupe, on peut tout "ramener à Id".

On rappelle que pour un groupe discret  $\Gamma$ , il agit proprement si toute  $\Gamma$ -orbite est localement finie i.e, pour tout compact  $K \subset \mathbb{H}^n$ ,  $\{g \in \Gamma, gK \cap K \neq \emptyset\}$  est fini. Nous allons montrer dans un premier temps que, pour un groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$ , la discrétude implique déjà que  $\Gamma$  agisse proprement. En revanche, nous ne ferons pas systématiquement l'hypothèse que le groupe agit librement (par exemple  $\Gamma$  peut contenir des éléments elliptiques, auquel cas  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  n'est pas une variété (et  $\mathbb{H}^n \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  est un revêtement ramifié, mais nous n'entrerons pas dans les détails).

Pour ne pas avoir à répéter l'hypothèse que le groupe est discret, on utilise la définition suivante



**Définition 3.2.2.** On dit que  $\Gamma$  agit proprement discontinûment si toute  $\Gamma$ -orbite est localement finie.

Ainsi si  $\Gamma$  est discret et qu'il agit proprement, alors il agit proprement discontinûment. On montrera que la réciproque est aussi vraie.

**Remarque** De manière évidente,  $\Gamma$  agit proprement discontinûment si et seulement si chaque orbite est discrète et si chaque stabilisateur est fini.

Nous montrerons que la discrétude de toutes les orbites implique la discrétude du groupe.

Commençons par analyser la topologie de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . On dispose a priori de deux topologies sur  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  :

1. La topologie de  $\text{PO}(n, 1)$  comme (quotient de) groupes de matrices.
2. La topologie de la convergence uniforme sur les compacts donnée par l'action sur  $\mathbb{H}^n$  (topologie compacte-ouverte).

**Théorème 3.2.3.** Ces deux topologies coïncident.

**Preuve:**

**Lemme 3.2.4.** Une suite d'isométries  $(\phi_i)$  d'un espace métrique  $X$  converge uniformément sur les compacts vers une isométrie  $\phi$  si et seulement si elle converge simplement.

**Preuve:** La condition est évidemment nécessaire puisqu'un point est compact.

Inversement, soit  $K$  un compact et  $\varepsilon > 0$ . On suppose que  $(\phi_i)_i$  ne converge pas uniformément sur  $K$  : il existe donc une suite croissante d'indice  $(i_j)_j$  et une suite de points  $(x_j)_j$  de  $K$  tel que

$$d(\phi_{i_j}(x_j), \phi(x_j)) \geq \varepsilon.$$

Quitte à extraire encore dans la suite  $(x_j)$ , on peut supposer que  $(x_j)$  converge vers  $x \in K$ . On choisit alors  $j$  tel que  $d(x_j, x) < \varepsilon/4$  et  $d(\phi_{i_j}(x), \phi(x)) < \varepsilon/2$  (grâce à la convergence simple au point  $x$ ). Il suit que

$$d(\phi_{i_j}(x_j), \phi(x_j)) \leq d(\phi_{i_j}(x_j), \phi_{i_j}(x)) + d(\phi_{i_j}(x), \phi(x)) + d(\phi(x), \phi(x_j)) < \varepsilon.$$

□

Revenons au théorème

- Supposons que  $A_i \rightarrow A$  dans  $\text{PO}(n, 1)$ . Alors, pour tout  $x$ ,  $A_i x \rightarrow Ax$  (action linéaire). Ainsi  $A_i \rightarrow A$  pour la topologie compacte-ouverte d'après le lemme.
- Inversement, on suppose que  $A_i \rightarrow A$  uniformément sur les compacts de  $\mathcal{H}^n$ . Alors  $A_i e_{n+1} \rightarrow A e_{n+1}$ . Puis, en posant  $v_j = e_j + \sqrt{2}e_{n+1} \in \mathcal{H}^n$ , alors

$$A_i v_j = A_i e_j + \sqrt{2}A_i e_{n+1} \rightarrow A v_j = A e_j + \sqrt{2}e_{n+1}.$$

Donc  $A_i e_j \rightarrow A e_j$ , ce qui suffit à montrer la convergence dans  $\text{PO}(n, 1)$ .

□

**Théorème 3.2.5.** Le groupe  $\Gamma$  est discret si et seulement si  $\Gamma$  agit proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}^n$ .

**Preuve:**

**Lemme 3.2.6.** *Les applications d'évaluation*

$$\begin{array}{ccc} f_a : \text{Isom}(\mathbb{H}^n) & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \\ \gamma & \longmapsto & \gamma a \end{array}$$

sont propres.

**Preuve:** Dans le modèle de la boule, on rappelle qu'il existe des translations hyperboliques  $\tau_a$  envoyant 0 sur  $a$ . Avec ces translations, on forme un homéomorphisme

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \text{Isom}(\mathbb{H}^n) \\ (A, a) & \longmapsto & \tau_a A \end{array}$$

**faut-il en dire plus ?** . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{H}^n$ . L'ensemble  $\{\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n), \gamma a \in K\}$  s'identifie via l'homéomorphisme ci-dessus à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times K$  qui est donc compact.  $\square$

**Lemme 3.2.7.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe agissant proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}^n$  et soit  $p \in \mathbb{H}^n$  un point fixé par un certain élément  $\gamma \neq \text{id}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . Il existe un voisinage de  $p$  dans lequel tous les autres points (différents de  $p$ ) ne sont fixés par aucun élément de  $\Gamma$  (différent de l'identité). En particulier, il existe des points de  $\mathbb{H}^n$  qui ne sont fixés par aucun élément du groupe.*

**Preuve:** Supposons que  $\gamma p = p$  pour  $\gamma \neq \text{id}$  et qu'il existe  $p_n \rightarrow p$  et  $\gamma_n \in \Gamma$  tels que  $\gamma_n p_n = p_n$ . La boule fermée  $\bar{B}_{3\varepsilon}(p)$  est compacte donc  $\{\gamma \in \Gamma, \gamma p \in \bar{B}_{3\varepsilon}(p)\}$  est fini. Ainsi, pour  $n$  suffisamment grand,  $d(\gamma_n p, p) > 3\varepsilon$  et  $d(p_n, p) < \varepsilon$ . Puis, par l'inégalité triangulaire,

$$d(\gamma_n p, p) \leq d(\gamma_n p, \gamma_n p_n) + d(\gamma_n p_n, p) = d(p_n, p) + d(p_n, p) < 2\varepsilon.$$

$\square$

Revenons au théorème

1. Supposons que  $\Gamma$  soit discret et soit  $K$  un compact de  $\mathbb{H}^n$ ,  $z \in \mathbb{H}^n$ . L'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma, \gamma z \in K\}$  est un compact de  $\Gamma$  donc est fini.
2. Inversement, supposons que  $\Gamma$  agisse proprement discontinûment mais ne soit pas discret. On choisit un point  $s \in \mathbb{H}^n$  fixé par aucun élément du groupe. Puisque  $\Gamma$  n'est pas discret, il existe des éléments distincts  $\gamma_k, \gamma_k \rightarrow \text{id}$ . Donc  $\gamma_k s \rightarrow s$ . Puisque  $s$  n'est fixé par personne, les  $\gamma_k s$  sont tous différents. Toute boule fermée centrée en  $s$  contient donc une infinité d'éléments de l'orbite.

$\square$

**Corollaire 3.2.8.** *Le groupe  $\Gamma$  agit proprement discontinûment si et seulement si, pour tout  $z \in \mathbb{H}^n$ , l'orbite  $\Gamma z$  est discrète dans  $\mathbb{H}^n$ .*

**Preuve:** Si  $\Gamma$  agit proprement discontinûment, chaque orbite est localement finie donc discrète. Inversement, si  $\Gamma$  n'agit pas proprement discontinûment, alors  $\Gamma$  n'est pas discret par le théorème précédent. On a construit au cours de la preuve une orbite non discrète.  $\square$

### 3.3 Groupes élémentaires

Dans cette section, on se place en dimension 3.

### 3.3.1 Préliminaire sur les points fixes

Pour un élément  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ,  $\gamma \neq \text{id}$ , on note  $F_\gamma = \{z \in \hat{\mathbb{C}}, \gamma z = z\}$ .

**Remarque** Le cardinal de  $F_\gamma$  est 1 ou 2. Si  $\gamma$  est parabolique ou hyperbolique, alors  $F_\gamma = \{z \in \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}, \gamma z = z\}$ . Si  $\gamma$  est elliptique, alors  $F_\gamma = \{\alpha, \beta\}$  (une transformation de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  est une rotation autour d'un axe) et la géodésique  $(\alpha\beta)$  est fixe points par points.

**Proposition 3.3.1.** 1. Les isométries  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont un point fixe en commun si et seulement si  $\text{trace}[\gamma, \gamma'] = 2$ .

2. On suppose que  $\text{trace}[\gamma, \gamma'] = 2$  et  $\gamma \neq \text{id}$ ,  $\gamma' \neq \text{id}$ . Alors

- (a) Soit  $[\gamma, \gamma'] = 1$  (i.e  $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma$ ) et  $F_\gamma = F_{\gamma'}$ .
- (b) Soit  $[\gamma, \gamma']$  est parabolique et  $F_\gamma \neq F_{\gamma'}$ .

**Remarque** Le commutateur  $[\gamma, \gamma']$  est indépendant du choix des représentants dans  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  : la trace est donc bien définie.

**Preuve:** 1. On peut supposer que  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $ad = 1$ . Posons  $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  avec  $a'd' - b'c' = 1$ . Le calcul donne

$$\text{trace}[\gamma, \gamma'] = 2 + b^2 c'^2 + bc'(a-d)(a'-d') - b'c'(a-d)^2.$$

Si  $F_\gamma \cap F_{\gamma'} \neq \emptyset$ , on peut supposer que  $\gamma\infty = \gamma'\infty = \infty$  et alors  $c' = 0$  puis donc  $\text{trace}[\gamma, \gamma'] = 2$ .

Inversement, supposons  $\text{trace}[\gamma, \gamma'] = 2$ .

- Si  $\gamma$  est parabolique, on peut supposer,  $\gamma(z) = z + 1$  (i.e  $a = d = b = 1$ ). De  $\text{trace}[\gamma, \gamma'] = 2$ , on tire  $c' = 0$ .
- Si  $\gamma$  n'est pas parabolique, on peut supposer que  $\gamma(z) = k^2 z$  ([voir l'exercice sur les classes de conjugaison](#)) qui regroupe le cas hyperbolique et elliptique ( $a = k$ ,  $b = c = 0$ ,  $d = 1/k$ ). Ainsi  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma(\infty) = \infty$ . Donc

$$2 = \text{trace}[\gamma, \gamma'] = 2 - b'c'(a-d)^2 \text{ donne } b'c' = 0$$

Ainsi, soit  $c' = 0$  et  $\gamma'\infty = \infty$ , soit  $b' = 0$  et  $\gamma'(0) = 0$ .

2. On suppose  $\gamma\infty = \gamma'\infty = \infty$  donc

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \text{ et } \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1/a' \end{pmatrix}$$

Un calcul facile donne  $[\gamma, \gamma'] = 1$  si et seulement si  $\frac{b'}{a'}(1-a^2) = \frac{b}{a}(1-a'^2)$ . Puis, on déduit

- Si  $a = 1$ , alors  $b \neq 0$  car  $\gamma \neq \text{id}$ ; on obtient  $a' = 1$ . Dans ce cas  $F_\gamma = F_{\gamma'} = \{\infty\}$ .
- Si  $a \neq 1$ , alors  $F_\gamma = \{\infty, \frac{b}{1/a-a}\}$ . L'équation donne  $\frac{b}{1/a-a} = \frac{b'}{1/a'-a'}$ .

□

**Proposition 3.3.2.** Soit  $\gamma, \gamma' \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  deux isométries de  $\mathbb{H}^3$  différentes de  $\text{id}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma$ .
2.  $\gamma'(F_\gamma) = F_\gamma$  et  $\gamma(F_{\gamma'}) = F_{\gamma'}$ .
3. (a) Soit  $F_\gamma = F_{\gamma'}$   
 (b) Soit  $F_\gamma \cap F_{\gamma'} = \emptyset$  et alors  $\gamma^2 = \gamma'^2 = (\gamma\gamma')^2 = 1$  et  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont un point fixe en commun dans  $\mathbb{H}^3$ .

**Preuve:** 1. Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  commutent, les espaces propres de l'un sont stables par l'autre (on rappelle que l'action des isométries sur  $\hat{\mathbb{C}}$  est l'action projective. Ceci montre que 1. implique 2. .

2. Pour montrer que 2. implique 3. , on suppose 2. et  $F_\gamma \neq F_{\gamma'}$ . Il existe donc  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$  tel que  $\gamma(\alpha) = \alpha$  et  $\gamma'(\alpha) \neq \alpha$ . Or  $\gamma'(\alpha) \in F_\gamma$  donc  $F_\gamma = \{\alpha, \beta\}$  où  $\beta = \gamma'(\alpha) \neq \alpha$ . Maintenant  $\gamma'(\beta) \in F_\gamma$  : si  $\gamma'(\beta) = \beta$ , on aurait  $\gamma'(\alpha) = \alpha$ ; c'est donc que  $\gamma'(\beta) = \alpha$ . On obtient bien que  $F_\gamma \cap F_{\gamma'} = \emptyset$  (ni  $\alpha$ , ni  $\beta$  n'est fixé par  $\gamma'$ ). De plus,  $\gamma'^2$  fixe  $\alpha, \beta$  et  $F_{\gamma'}$  et on déduit que  $\gamma'^2 = 1$  (il a trop de points fixes).

De même  $\gamma\gamma'(\alpha) = \beta$  et  $\gamma\gamma'(\beta) = \alpha$  donc,  $F_{\gamma\gamma'} \cap F_\gamma = \emptyset$ , puis  $(\gamma\gamma')^2 = 1$ .

Ou encore, en échangeant le rôle de  $\gamma$  et  $\gamma'$ , on montre que  $\gamma^2 = 1$ .

Quitte à conjuguer,  $\gamma(z) = kz$  car  $\gamma$  n'est pas parabolique. Donc  $\gamma = -\text{id}$ . Du coup  $\gamma'(z) = \frac{k'}{z}$  puisque  $\gamma'$  échange les points fixes de  $\gamma$ . L'action dans  $\mathbb{H}^3 = \mathcal{U}^3$  est

$$\gamma(z + tj) = -z + tj \quad \text{et} \quad \gamma'(z + tj) = \frac{k'z + |k'|tj}{|z|^2 + t^2}.$$

On vérifie que  $\sqrt{|k'|}j$  est fixe par  $\gamma$  et  $\gamma'$ .

3. Supposons enfin 3. . Si  $F_\gamma = F_{\gamma'}$ , par la proposition précédente, on a 1. . Si  $F_\gamma \neq F_{\gamma'}$ , le groupe engendré par  $\gamma$  et  $\gamma'$  est d'exposant 2 donc commutatif.  $\square$

### 3.3.2 Sous-groupes élémentaires de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$

Les sous-groupes élémentaires sont les sous-groupes du groupe d'isométrie de  $\mathbb{H}^3$  sont les groupes qui ont une dynamique pauvre, au sens suivant.

**Définition 3.3.3.** *Un sous-groupe de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  est élémentaire s'il admet une orbite finie dans  $\mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ .*

Nous avons déjà remarqué que les isométries qui ont une dynamique intéressante sont les isométrie parabolique et hyperbolique. Cette remarque naïve peut être soutenue par l'énoncé suivant.

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  qui ne contient que des elliptiques (et 1). Alors il existe un point fixe  $x \in \mathbb{H}^3$  commun à tous les éléments de  $G$ . En particulier,  $G$  est élémentaire.*

**Corollaire 3.3.5.** *Si  $G$  est fini, alors  $G$  a un point fixe dans  $\mathbb{H}^3$ .*

Pour attaquer la preuve de ce théorème, nous aurons besoin de deux lemmes sur les points fixes des groupes qui ne contiennent que des elliptiques. On rappelle qu'une isométrie elliptique  $\gamma$  a deux points fixes  $\alpha$  et  $\beta$  au bord de  $\mathbb{H}^3$ , que la géodésique  $(\alpha\beta)$  est fixe point par point. On note cette géodésique  $A_\gamma$  et on l'appelle l'axe de  $\gamma$ .

**Lemme 1.** *Soit  $\gamma, \gamma'$  des elliptiques tels que  $\gamma\gamma'$  est aussi elliptique.*

- Les points fixes de  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont cocycliques.
- Si de plus  $[\gamma, \gamma']$  est elliptique ou 1, alors les axes de  $\gamma$  et  $\gamma'$  se coupent dans  $\mathbb{H}^3$ .

**Lemme 2.** Soit  $\gamma$  et  $\gamma'$  avec un point fixe commun dans  $\mathbb{H}^3$  (donc elliptiques). Alors

- Soit tous les éléments de  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  ont le même axe  $A_\gamma = A_{\gamma'}$ .
- Soit il existe  $\gamma'' \in \langle \gamma, \gamma' \rangle$  tel que  $A_\gamma$ ,  $A_{\gamma'}$  et  $A_{\gamma''}$  ne sont pas coplanaires.

Voyons déjà comment prouver le théorème.

**Preuve du théorème:** Si tous les éléments de  $G$  ont le même axe, le théorème est démontré (l'axe est fixe point par point). On peut donc supposer qu'il existe  $\gamma$  et  $\gamma'$  dans  $G$  et différents de 1 tels que  $A_\gamma \neq A_{\gamma'}$ . On applique le lemme 1 :  $\gamma\gamma'$  est elliptique,  $[\gamma, \gamma']$  est elliptique ou 1. Ainsi  $A_\gamma \cap A_{\gamma'} \neq \emptyset$  dans  $\mathbb{H}^3$ . En conjuguant  $G$ , on peut supposer que  $A_\gamma \cap A_{\gamma'} = \{0\}$  dans  $B^3$ . Ensuite, avec le lemme 2, il existe  $\gamma'' \in \langle \gamma, \gamma' \rangle$  tel que  $A_\gamma$ ,  $A_{\gamma'}$  et  $A_{\gamma''}$  ne sont pas coplanaires. Toujours d'après le lemme 1, l'axe de  $\gamma''$  coupe les deux autres et le point d'intersection ne peut être que 0, sinon les trois axes seraient coplanaires. Il s'agit maintenant de montrer que 0 est un point fixe commun à tous les éléments de  $G$ . Soit donc  $\delta \in G$ ,  $\delta \neq 1$ . Par le lemme 1,  $A_\gamma$  et  $A_\delta$  se coupent dans  $B^3$ . Donc  $A_\gamma$  et  $A_\delta$  sont dans un même plan  $P$ . C'est un plan vectoriel car  $0 \in A_\gamma$ . De même, il existe  $P'$  contenant 0,  $A_{\gamma'}$  et  $A_\delta$ , et  $P''$  contenant 0,  $A_{\gamma''}$  et  $A_\delta$ .

Ainsi  $A_\delta$  est contenu dans  $P \cap P' \cap P''$  qui est de dimension 0 (exclu car il contient  $A_\delta$ ), 1, ou 2 (exclu parce que  $P = P' = P''$  est absurde car  $A_\gamma$ ,  $A_{\gamma'}$  et  $A_{\gamma''}$  ne sont pas coplanaires). Finalement  $A_\delta = P \cap P' \cap P''$  et  $A_\delta$  contient 0 !  $\square$

Terminons donc avec les deux lemmes restants

**Preuve du lemme 1:** Si  $F_\gamma \cap F_{\gamma'} \neq \emptyset$ , alors les points fixes sont cocycliques (il n'y en a que 3). Si de plus,  $[\gamma, \gamma']$  est elliptique ou 1, alors  $[\gamma, \gamma'] = 1$  et  $F_\gamma = F_{\gamma'}$  (proposition 3.3.1 des préliminaires). Donc  $A_\gamma = A_{\gamma'}$ .

Si maintenant  $F_\gamma \cap F_{\gamma'} = \emptyset$ , on peut supposer que  $\gamma(z) = kz$  avec  $|k| = 1$ ,  $k \neq 1$ . On pose  $\gamma'(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  où  $\text{trace}^2 \gamma$  est réelle et dans  $[0, 4[$ . De même,  $\text{trace}^2 \gamma\gamma' = (ka + \bar{k}d)^2$  est réelle et dans  $[0, 4[$ . On en déduit qu'il existe  $u$  et  $v$  dans  $] -2, 2[$  tels que  $a + d = u$  et  $ka + \bar{k}d = v$ . D'où

$$a = \frac{\bar{k}u - v}{\bar{k} - k} \quad \text{et} \quad d = \frac{ku - v}{k - \bar{k}}$$

On en retient que  $a = \bar{d}$ , ce qui est utile pour faire le calcul des points fixes de  $\gamma'$ . On trouve facilement

$$\alpha', \beta' = \frac{1}{2c} \left( (a - d) \pm i\sqrt{4 - \text{trace}^2 \gamma'} \right)$$

et on constate que  $\alpha', \beta' \in i\mathbb{R}$ .

**Rappel.** On rappelle qu'on dispose d'un critère (de nature projective) pour décider si 4 points de  $\hat{C}$  sont cocycliques, c'est-à-dire en fait si 4 points de la droite projective complexe sont sur la même droite projective réelle : il suffit de vérifier si le birapport est réel. On énonce sans preuve les propriétés utiles du birapport.

- Soient donc  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  des points distincts de  $\hat{C}$ ; le birapport de ces 4 points est le nombre complexe donné par

$$[p_1 : p_2 : p_3 : p_4] = \frac{p_2 - p_4}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_4}.$$

- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,

$$[p_1 : p_2 : p_3 : p_4] = [\lambda p_1 : \lambda p_2 : \lambda p_3 : \lambda p_4]$$

(on peut en fait montrer que le birapport est invariant par toute transformation projective (bijective)).

- Il est facile de voir que

$$[0 : 1 : \infty : z] = z$$

- Enfin, on montre que  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  sont cocycliques si et seulement si

$$[p_1 : p_2 : p_3 : p_4] \in \mathbb{R}.$$

il suffit de montrer que  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  est trois fois (projectivement) transitif sur  $\hat{\mathbb{C}}$  et de se ramener au cas précédent où  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$  et  $p_3 = \infty$ .

Ici, les 4 points fixes sont  $0, \infty, \alpha'$  et  $\beta'$  et on a

$$[0 : \infty : \alpha' : \beta'] = \left[ 0 : \infty : 1 : \frac{\beta'}{\alpha'} \right] = -\frac{\beta'}{\alpha'} \in \mathbb{R}$$

car  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont dans  $i\mathbb{R}$ .

Enfin, pour voir que les axes se coupent, posons

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a = \bar{d}, \quad ad - bc = 1$$

Le calcul donne

$$\text{trace}^2 [\gamma, \gamma'] = 4 \left( 1 + \sin^2 \theta \left( |a|^2 - 1 \right) \right).$$

Pour que  $[\gamma, \gamma']$  soit elliptique, il faut nécessairement que  $|a|^2 < 1$ . Écrivons  $a = s + it$ , donc  $d = s - it$ , de sorte que les points fixes sont

$$\alpha', \beta' = \frac{i}{c} \left( t \pm \sqrt{1 - s^2} \right).$$

Pour que les points fixes se coupent, il faut que 0 soit à l'intérieur du segment  $[\alpha', \beta']$  donc que les signes des parties imaginaires de  $\alpha'$  et  $\beta'$  soient opposés. Posons encore  $\alpha' = \lambda_1 \frac{i}{c}$  et  $\beta' = \lambda_2 \frac{i}{c}$ . On trouve

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left( t + \sqrt{1 - s^2} \right) \left( t - \sqrt{1 - s^2} \right) = t^2 + s^2 - 1 < 0.$$

□

**Preuve du lemme 2:** On peut supposer que  $A_\gamma \cap A_{\gamma'}$  contient  $0 \in B^3$ .

1. Si  $A_\gamma = A_{\gamma'}$ , alors, pour tout  $\gamma'' \in \langle \gamma, \gamma' \rangle$ ,  $A_{\gamma''} = A_{\gamma'} = A_\gamma$  ( $\gamma$  et  $\gamma'$  fixent les mêmes points donc  $\gamma''$  aussi, donc son axe est le même).
2. Si  $A_\gamma \cap A_{\gamma'} = \{0\}$ ,  $A_\gamma$  et  $A_{\gamma'}$  sont dans un même plan  $P$  et on distingue encore 3 sous-cas
  - (a) Si  $\gamma(A_{\gamma'})$  n'est pas inclus dans  $P$ , alors  $\gamma'' = \gamma\gamma'\gamma^{-1}$  convient car  $A_{\gamma''} = \gamma(A_{\gamma'})$ .
  - (b) De même si  $\gamma'(A_\gamma)$  n'est pas inclus dans  $P$ .

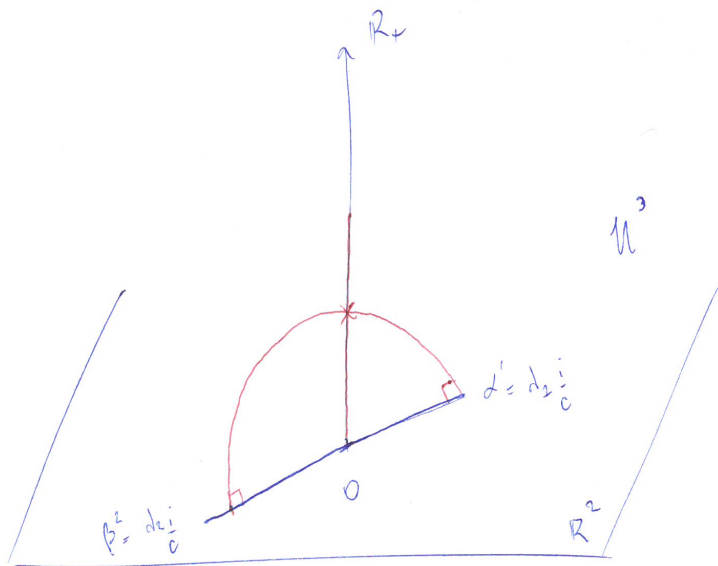


Figure 3.3: Les axes se coupent

- (c) Sinon  $\gamma(A_{\gamma'}) \subset P$  et  $\gamma'(A_{\gamma}) \subset P$ . Ainsi  $\gamma(P) = P$  et  $\gamma'(P) = P$ . La seule possibilité est que  $\gamma$  et  $\gamma'$  soient des rotations d'angle  $\pi$  autour de leurs axes. Soit alors  $A''$  l'orthogonale de  $P$ . Alors  $\gamma$  et  $\gamma'$  échangent  $A''(+\infty)$  et  $A''(-\infty)$  donc  $\gamma^2 = \gamma'^2 = 1$  et  $\gamma'' = \gamma\gamma'$  fixe  $A''(+\infty)$  et  $A''(-\infty)$ . Donc  $\gamma''$  est elliptique d'axe  $A''$

□

**Théorème 3.3.6.** *Tout sous-groupe abélien de  $PSL_2(\mathbb{C})$  est élémentaire (et même fixe un point).*

**Preuve:** Si ce groupe ne contient que des elliptiques, c'est bon. Si ce groupe contient un élément parabolique ou hyperbolique  $\gamma$ , alors, pour tout  $\gamma' \in G$ ,  $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma$  donc (proposition 3.3.1)  $F_{\gamma} = F_{\gamma'}$ . Donc  $F_{\gamma}$  est fixe par  $G$ . □

### 3.3.3 Sous-groupes discrets élémentaires

**Théorème 3.3.7.** *Soit  $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{C})$  un groupe discret et élémentaire.*

1. Soit  $\Gamma$  ne contient que des elliptiques et alors  $\Gamma$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , à  $D_n$ ,  $\mathfrak{A}_4$ ,  $\mathfrak{S}_4$  ou  $\mathfrak{A}_5$ .
2. Soit  $\Gamma$  contient un parabolique et alors il ne contient pas d'hyperbolique. Il est isomorphe à un groupe discret d'isométries du plan euclidien.
3. Soit  $\Gamma$  contient un hyperbolique, Alors il ne contient pas de parabolique.

**Preuve:** 1. Dans le premier cas,  $\Gamma$  fixe un point : il est conjugué à un sous-groupe de  $SO_3$  qui est compact. Donc  $\Gamma$  est fini. Les sous-groupes finis de  $SO_3$  sont les d'isométries

- directes et indirectes d'un  $n$ -gone. On obtient un groupe cyclique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ou diédral  $D_n$ .
- directes du cube et de l'octaèdre :  $\mathfrak{S}_4$ .

- directes du tétraèdre :  $\mathfrak{A}_4$ .
- directes du dodécaèdre et de l'icosaèdre :  $\mathfrak{A}_5$ .

**Lemme 3.3.8.** *Soit  $\gamma$  un hyperbolique de  $PSL_2(\mathbb{C})$  et soit  $\gamma'$  tel que  $F_\gamma \cap F_{\gamma'} = \{\alpha\}$ . Alors  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  n'est pas discret.*

**Preuve:** On peut supposer  $\alpha = \infty$ ,  $\gamma(z) = kz$  avec  $|k| > 1$  et  $\gamma'(z) = az + b$ . Alors

$$\gamma^{-n} \gamma' \gamma^n(z) = az + k^{-n}b \rightarrow az.$$

conclure □

2. Si  $\Gamma$  contient un parabolique  $\gamma'$ , on suppose  $\gamma'\infty = \infty$ . Toutes les autres orbites de  $\gamma'$  sont infinies donc, si  $\Gamma$  a une orbite finie, c'est forcément  $\{\alpha\}$ . Puisque  $\Gamma$  fixe un point, il est conjugué à un groupe de  $\{z \mapsto az + b\}$  avec  $|a| = 1$  ( $\Gamma$  ne contient pas d'hyperbolique). C'est un groupe d'isométries euclidiennes.
3. Découle du point 2.

□

### 3.4 Régions fondamentales

On se place à partir de maintenant en dimension 2 bien que la théorie soit semblable en dimensions supérieures. Nous avons déjà établi une correspondance entre variétés hyperboliques et groupes discrets d'isométries de  $\mathbb{H}^2$  : d'une variété hyperbolique, on obtient un groupe en considérant le groupe fondamental, et d'un groupe on obtient une variété en prenant le quotient de  $\mathbb{H}^2$  par le groupe. Le but de cette section est d'expliquer concrètement comment construire le quotient par un groupe donné et d'analyser la géométrie de la variété obtenue.

**Définition 3.4.1.** *Un polygone de  $\mathbb{H}^2$  est une partie convexe fermée dont les bords sont des morceaux de géodésiques. Un côté du polygone est un segment géodésique maximal dans le bord. Un sommet est un point du bord à l'intersection de deux côtés.*

On ne suppose pas toujours que le polygone est fini. En revanche, on le suppose localement fini : dans tout ouvert de  $\mathbb{H}^2$ , le polygone peut s'écrire comme réunion finie de géodésiques.

Soit maintenant  $\Gamma$  un groupe discret agissant sur  $\mathbb{H}^2$ .

**Définition 3.4.2.** *Un polygone est dit fondamental pour l'action de  $\Gamma$  si*

1. *Les images  $\gamma(\overset{\circ}{P})$  de l'intérieur de  $P$  sont deux à deux disjointes.*
2. *Les images pavent  $\mathbb{H}^2$  :  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(P) = \mathbb{H}^2$ .*

Ainsi, pour construire la variété quotient  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ , il suffit de comprendre l'action de  $\Gamma$  sur une région fondamentale.

**Définition 3.4.3.** *Le domaine de Dirichlet  $D_p$  associé à  $\Gamma$  et centré en  $p \in \mathbb{H}^2$  est l'ensemble*

$$D_p = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \forall \gamma \in \Gamma, d(z, p) \leq d(z, \gamma p)\}.$$

On constate à l'exercice [ref](#) que le domaine de Dirichlet de  $PSL_2(\mathbb{Z})$  (qui est discret dans  $PSL_2(\mathbb{R})$ ) est un polygone. C'est presque toujours le cas.



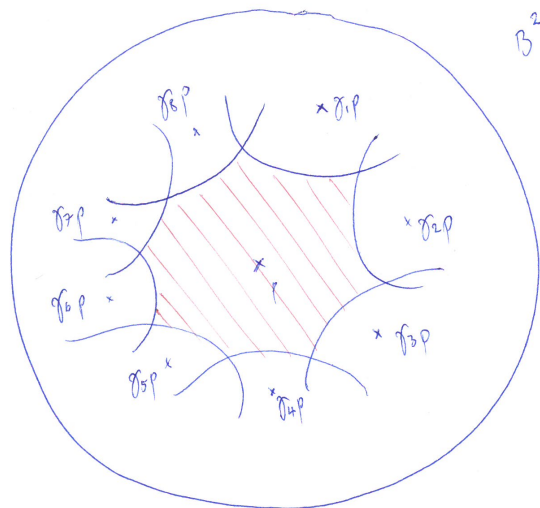


Figure 3.4: Domaine de Dirichlet

**Proposition 3.4.4.** Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien et  $p \in \mathbb{H}^2$  un point à stabilisateur trivial (un tel point existe d'après le lemme 3.2.7). Alors  $D_p$  est un polygone.

**Preuve:** L'ensemble  $D_p$  est l'intersection des 1/2-plans

$$D_\gamma = \{z \in \mathbb{H}^2, d(z, p) \leq d(z, \gamma p)\}$$

pour  $\gamma \in \Gamma$ . C'est donc un convexe fermé. Il reste à vérifier la condition de finitude locale. Soit

$$\Gamma_R = \{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \text{id}, d(p, \gamma p) \leq 2R\}$$

Cet ensemble est fini car  $\Gamma$  est fuchsien et que  $p$  n'est fixé par aucun point. Puis  $D_p \cap B(p, R)$  se réécrit comme réunion finie

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_R} D_\gamma \cap B(p, R).$$

□

On donnera plus tard des conditions qui garantissent que  $D_p$  est fini.

**Théorème 3.4.5.** Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien. Tout polygone de Dirichlet centré en  $p$  (à stabilisateur trivial) est un polygone fondamental pour  $\Gamma$  agissant sur  $\mathbb{H}^2$ .

**Preuve:** L'orbite  $\Gamma \cdot p$  est fermée par discrétude  $\Gamma$ . Pour tout  $z \in \mathbb{H}^2$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $d(z, \Gamma p) = d(z, \gamma p)$ . On en conclut que  $\gamma^{-1}z \in D_p$ . En effet, pour tout  $\gamma' \in \Gamma$ ,

$$d(\gamma^{-1}z, p) \leq d(z, \gamma p) \leq d(z, \gamma' p)$$

Donc

$$d(\gamma^{-1}z, p) \leq d(z, \gamma \gamma' p) = d(\gamma^{-1}z, \gamma' p).$$

Ceci montre que  $\bigcup \gamma D_p$  recouvre  $\mathbb{H}^2$ .

Si maintenant  $z$  est dans l'intersection  $\gamma D_p \cap \gamma' D_p$  avec  $\gamma \neq \gamma'$ . Alors la distance de  $z$  à  $\Gamma p$  est atteinte en deux points différents ( $z \in \gamma D_p$  signifie que  $d(z, \Gamma p) = d(z, \gamma p)$ ). Autrement dit, le point  $\gamma^{-1}z$  est équidistant de  $p$  et de  $\gamma^{-1}\gamma'(p)$ . Donc  $\gamma^{-1}z \in \{t, d(t, p) = d(t, \alpha p)\}$  pour un certain  $\alpha \in \Gamma$ . Donc  $\gamma^{-1}z$  est sur le bord de  $D_p$  et les intérieurs sont disjoints. □

### 3.4.1 Pavage et présentation

On montre dans ce paragraphe qu'un domaine de Dirichlet pour l'action de  $\Gamma$  en donne une présentation. Ainsi la correspondance  $\{ \text{groupes discrets} \} \leftrightarrow \{ \text{variétés hyperboliques} \}$  s'enrichit et on dispose maintenant de plus d'informations sur le groupe.

**Lemme 3.4.6.** *Soit  $z \in \partial D_p$ . Alors il existe  $\gamma \neq id$  tel que  $\gamma z \in \partial D_p$ . Cet élément  $\gamma$  est unique si  $z$  n'est pas un sommet.*

**Preuve:** On sait que  $z \in \partial D_p$  si et seulement si  $d(z, \Gamma \cdot p)$  est atteinte à la fois en  $p$  et en  $\gamma p$ . Ainsi la distance de  $\gamma^{-1}z$  à l'orbite est atteinte en  $p$  et  $\gamma^{-1}p$ . Donc  $\gamma^{-1}z$  est aussi sur le bord du domaine. Réciproquement, si  $z$  et  $\gamma^{-1}z$  sont dans  $\partial D_p$ , alors  $z$  est équidistant de  $p$  et  $\gamma p$ . Si  $z$  n'est pas un sommet, cela prouve l'unicité.

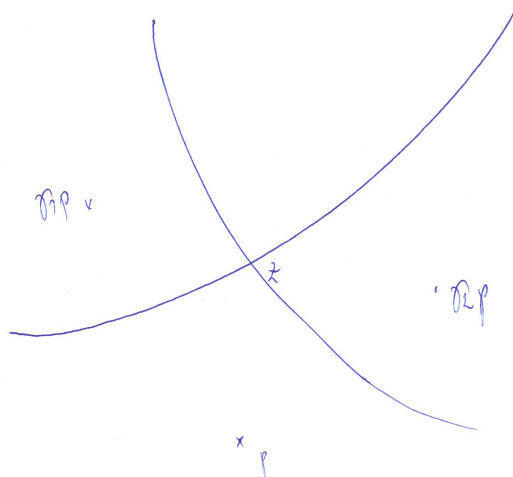


Figure 3.5: Un sommet est équidistant de  $p$ ,  $\gamma_1 p$  et  $\gamma_2 p$

□

Le lemme précédent ne précise pas que l'on doit avoir  $\gamma z \neq z$ . L'égalité peut avoir lieu pour les sommets mais aussi en certains milieux de segments géodésiques (par exemple pour  $z = i$  dans  $D_{2i}$  de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ )

Par convention, on rajoute ces points aux sommets, de sorte que, pour  $z \in \partial D_p$  et pour  $\gamma \in \Gamma$ , l'égalité  $\gamma z = z$  ne peut avoir lieu que si  $z$  est un sommet. Autrement dit, si  $z \in \partial D_p$  n'est pas un sommet, alors  $\gamma z$  est dans un autre côté de  $\partial D_p$ .

On note  $c_1, \dots, c_n$  les côtés de  $\partial D_p$ . L'action du groupe va nous donner une information combinatoire que l'on exprime avec les  $c_i$ . Pour chaque  $i$ , il existe en effet  $\gamma_i \in \Gamma$  et un unique  $j$  tel que  $\gamma_i c_i = c_j$ . Si le nombre de côtés de  $D_p$  est fini, on en déduit déjà qu'il est pair. Par unicité, on a aussi,  $\gamma_j = \gamma_i^{-1}$ . On note  $\sigma$  l'involution  $i \mapsto j$ .

La donnée de  $\sigma$  et des  $\gamma_i$  s'appelle un appariement de faces pour  $D_p$ . Le domaine fondamental  $D_p$  étant toujours fixé, on obtient la proposition suivante

**Proposition 3.4.7.** *On suppose  $P$  fini. Alors  $\Gamma$  est engendré par les  $\gamma_i$ .*

Noter bien qu'un changement de domaine fondamental peut donner un système de générateurs différents.

**Preuve:** Soit  $\gamma \in \Gamma$ . Considérons un chemin  $\alpha$  de  $p$  à  $\gamma p$  qui évite les sommets de toutes les images de  $D_p$  et qui est transverse aux côtés. On note  $c_1, \dots, c_N$  la suite (finie par compacité de  $\alpha$ ) des côtés des translatés de  $D_p$  que l'on croise le long du chemin.

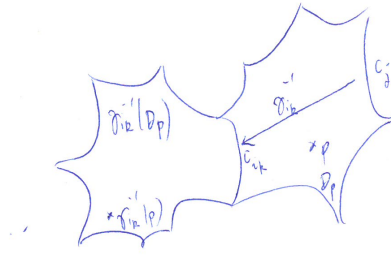


Figure 3.6: La suite des domaine fondamentaux translétés

Chacun est l'image d'un unique  $c_{i_k}$  de  $D_p$ . Le domaine fondamental voisin de  $D_p$  accolé le long de  $c_{i_k}$  est par construction  $\gamma_{i_k}^{-1}(D_p)$

La suite des translétés traversés est donc  $\gamma_{i_1}^{-1}(D_p)$ , puis  $\gamma_{i_1}^{-1}\gamma_{i_2}^{-1}(D_p)$ , etc jusqu'à  $\gamma(D_p) = \gamma_{i_1}^{-1}\gamma_{i_2}^{-1}\cdots\gamma_{i_N}^{-1}(D_p)$ . En particulier,  $\gamma p = \gamma_{i_1}^{-1}\gamma_{i_2}^{-1}\cdots\gamma_{i_N}^{-1}p$  et, comme  $p$  n'est fixé par aucun élément,  $\gamma$  s'écrit comme produit de  $\gamma_i$ .  $\square$

On voudrait maintenant trouver les relations dans le groupe. Elles sont associés aux sommets du polygone. On dispose en effet d'une relation d'équivalence sur les sommets

$$s \sim s' \text{ si et seulement s'il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma s = s'.$$

**Définition 3.4.8.** • *Un cycle elliptique est une classe d'équivalence pour la relation  $\sim$ .*

- *L'angle d'un cycle est la somme des angles internes à  $D_p$  en chaque sommet du cycle.*

On peut décrire ces cycles de manière combinatoire. Notons  $s_i = c_i \cap c_{i+1}$  et  $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i) - 1$ . Le cycle associé à  $s_i$  est

$$\{s_i, s_{\tilde{\sigma}(i)}, s_{\tilde{\sigma}^2(i)}, \dots, s_{\tilde{\sigma}^l(i)}\}$$

où  $s_{\tilde{\sigma}^{l+1}(i)} = i$  (le plus petit  $l$ ).

**Proposition 3.4.9.** *L'angle d'un cycle est de la forme  $\frac{2\pi}{q}$  où  $q \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas,  $\gamma_{\tilde{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i$  engendre le stabilisateur de  $s_i$  et est d'ordre  $q$ . En particulier, si le groupe ne contient pas d'elliptiques, tous les angles de cycles sont  $2\pi$ .*

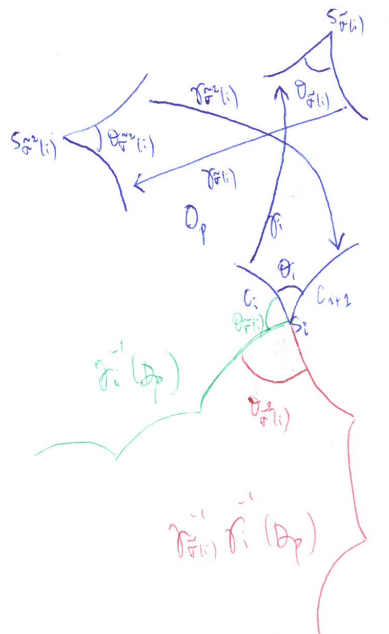
**Preuve:** Par construction,  $\gamma_{\tilde{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i$  stabilise  $s_i$  donc est d'ordre fini car le groupe est discret. Or c'est la rotation d'angle l'angle du cycle. Pour s'en convaincre, on rassemble autour de  $s_i$  tous les translétés correspondants aux  $\gamma_{\tilde{\sigma}^r(i)}$  et on suit le trajet d'un point sur le segment  $c_{i+1}$  (voir figure 3.7).

je ne comprends pas pourquoi l'élément engendre  $\square$

On montre enfin une réciproque de la construction précédente : lorsque l'on se donne un polygone avec appariements de faces tels que les cycles soient d'angles divisant  $2\pi$ , ces appariements engendrent un groupe fuchsien.

**Théorème 3.4.10** (de Poincaré). *Soit  $D$  un polygone compact de côtés  $c_1, \dots, c_{2n}$  avec un appariement de faces  $(\sigma, (\gamma_i)_{1 \leq i \leq 2n})$  tel que l'angle de chaque cycle divise  $2\pi$ . Alors le groupe engendré par les  $\gamma_i$  est fuchsien, de présentation*

$$\left\langle \gamma_i \mid \gamma_{\sigma(i)} = \gamma_i^{-1} \text{ et } \left( \gamma_{\tilde{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i \right)^q = 1 \text{ pour chaque sommet } s_i \text{ où l'angle du cycle est } \frac{2\pi}{q} \right\rangle$$

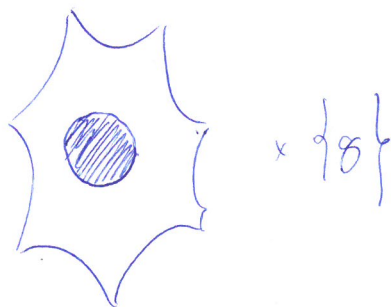

 Figure 3.7: Le stabilisateur de  $s_i$ 

**Preuve:** On considère le groupe abstrait  $G$  de présentation

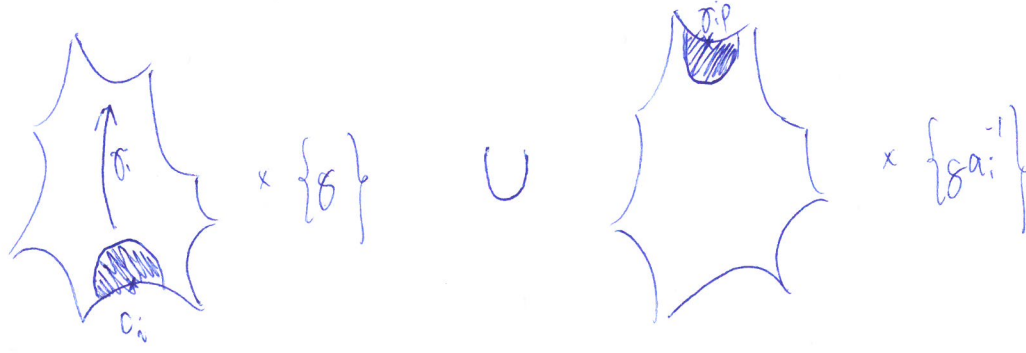
$$\left\langle a_i \mid a_{\sigma(i)} = a_i^{-1} \text{ et } \left( a_{\sigma^l(i)} \circ \cdots \circ a_i \right)^q = 1 \text{ pour chaque sommet } s_i \text{ où l'angle du cycle est } \frac{2\pi}{q} \right\rangle$$

On veut montrer que  $\Gamma$  est une représentation de  $G$  et que  $D$  est un polygone fondamental pour  $\Gamma$  (ce qui implique la discrétude). Pour cela, on construit un *espace combinatoire de pavage*. En effet, soit  $H = D \times G$  sur lequel on met la relation d'équivalence engendrée par  $(p, g) \sim (p', g')$  si et seulement s'il existe  $i$  tel que  $p = \gamma_i p'$  et  $g' = g a_i^{-1}$ . On note  $H^* = H / \sim$ . On munit  $H^*$  de la topologie quotient. Une base d'ouverts est donné par

1. Les boules contenues dans l'intérieur d'une copie  $D \times \{g\}$  de  $D$ .

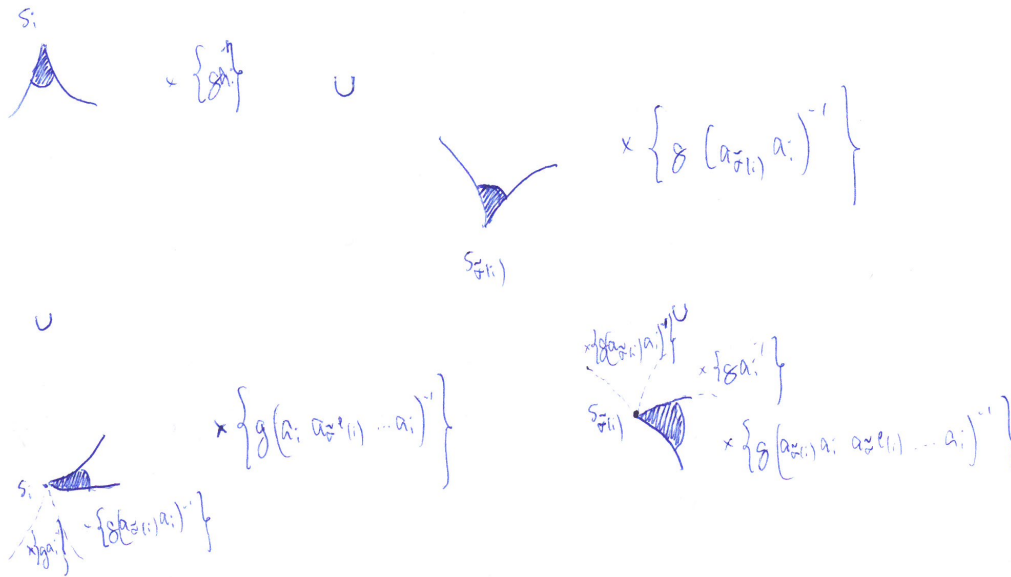

 Figure 3.8: Premier type d'ouverts de  $H^*$ 

2. L'union des deux demi-boules de mêmes rayons, l'une dans  $D \times \{g\}$  centrée en un point  $(p, g)$ ,  $p$  étant dans le bord de  $D$  mais sans être un sommet; et l'autre dans  $D \times \{g a_i^{-1}\}$  centrée en  $(\gamma_i p, g a_i^{-1})$ .


 Figure 3.9: Deuxième type d'ouverts de  $H^*$ 

3. L'union de toutes les boules de mêmes rayons centrées en les

$$\left( s_{\tilde{\sigma}^k(i)}, g \left[ \left( a_{\tilde{\sigma}^k(i)} \cdots a_i \right) \left( a_{\tilde{\sigma}^l(i)} \cdots a_i \right)^m \right]^{-1} \right) \text{ pour } 0 \leq k \leq l \text{ et } 0 \leq m \leq q.$$


 Figure 3.10: Troisième type d'ouverts de  $H^*$ 

Cette topologie rend  $H^*$  connexe. En effet, soit  $g \in G$ . On note  $l(g)$  sa longueur minimale comme mot en les  $a_i$ . Notons

$$H_n^* = D \times \{g \in G \mid l(g) \leq n\}.$$

On raisonne par récurrence sur  $n$ .  $H_1^*$  est homéomorphe à  $D$  donc est connexe. On suppose que  $H_n^*$  est connexe. Prenons  $g \in G$  de longueur  $n+1$  que l'on écrit  $g = g'a_i$  où  $l(g') = n$ . Si  $p \in c_i$ , alors  $(p, g) \sim (\gamma_i p, g')$  donc la projection du connexe  $D \times \{g\}$  dans  $H_{n+1}^*$  intersecte le connexe  $H_n^*$ . Ils sont donc dans la même composante connexe. Et ceci est vrai pour tout élément de longueur  $n+1$ .

D'autre part  $G$  agit sur  $H$  par  $g \cdot (p, g') = (p, gg')$  et cette action passe au quotient sur  $H^*$ . D'après la proposition précédente, les relations de  $G$  sont vérifiées par  $\Gamma$  (on n'a

pas utilisé le fait que  $D$  est un polygone de Dirichlet pour montrer cela). On a donc un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} r : G &\longrightarrow \Gamma \\ a_i &\longmapsto \gamma_i \end{aligned}$$

et on peut définir une application

$$\begin{aligned} j : H &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ (p, g) &\longmapsto r(g)p \end{aligned}$$

Alors  $j$  descend en une application  $j^*$  de  $H^*$  dans  $\mathbb{H}^2$ . En effet, soit  $(p, g)$  et  $(p', g')$  deux points équivalents : il existe  $i$  tel que  $p' = \gamma_i p$  et  $g' = g a_i^{-1}$ . Alors

$$j(p', g') = r(g')p' = r(g)\gamma_i^{-1}\gamma_i p = r(g)p = j(p, g).$$

On vérifie ensuite que  $j^*$  est un homéomorphisme local. Ce n'est pas difficile avec la liste des ouverts décrits précédemment.

1. Voir figure 3.11

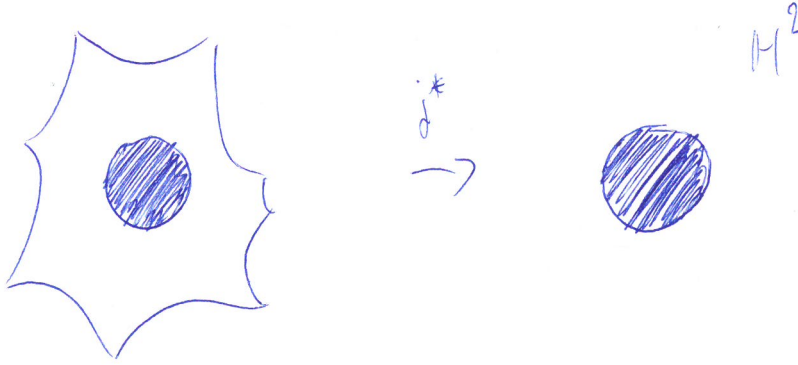


Figure 3.11: Premier type d'ouverts de  $H^*$

2. Voir figure 3.12
3. Voir figure 3.13

On voit facilement que  $j^*$  est propre. Ainsi  $j^*$  est un revêtement **ref exo** donc un homéomorphisme puisque  $\mathbb{H}^2$  est simplement connexe et  $H^*$  connexe.

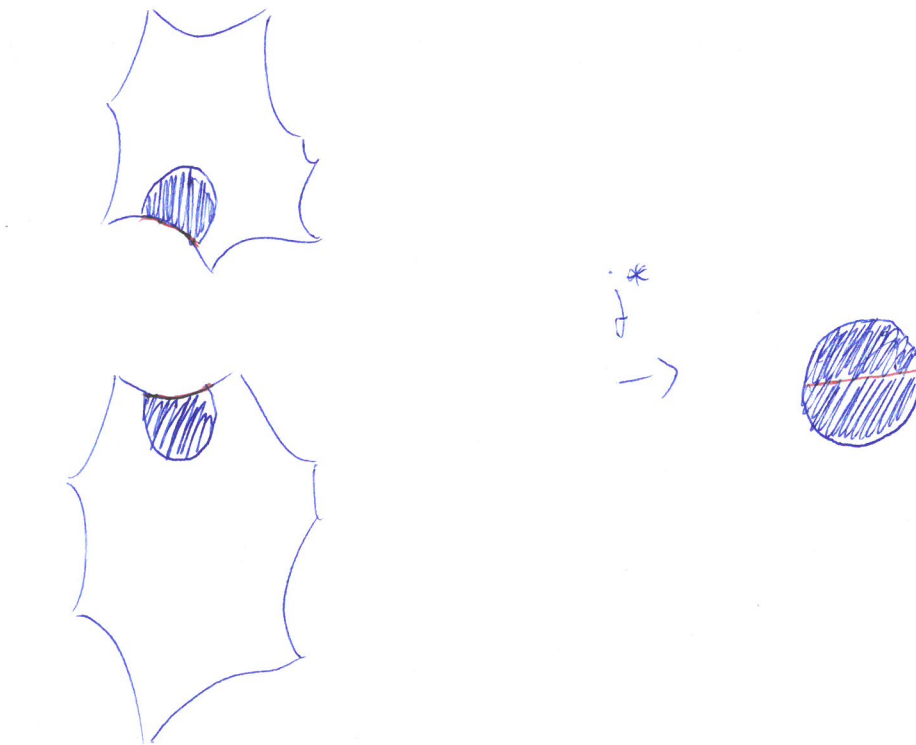
- Son injectivité montre que  $\ker(r)$  est trivial donc  $\Gamma$  est isomorphe à  $G$ .
- $G$  agissant sur  $H^*$  a clairement  $D \times \{1\}$  comme domaine fondamental donc  $D$  est un domaine fondamental de  $\Gamma$  agissant sur  $\mathbb{H}^2$ .

□

## 3.5 Géométrie des groupes fuchsien

### 3.5.1 Groupes géométriquement finis

Nous voulons définir l'aire d'une variété hyperbolique  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  comme l'aire d'un domaine fondamental. Cette définition est justifiée par le lemme suivant


 Figure 3.12: Deuxième type d'ouverts de  $H^*$ 

**Définition 3.5.1.** Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien agissant sur  $\mathbb{H}^2$ . Si l'aire hyperbolique d'un domaine fondamental  $D$  de  $\Gamma$  est finie, alors tous les domaines fondamentaux sont d'aires finies et toutes ces aires sont les mêmes.

**Preuve:** À faire. □

**Définition 3.5.2.** Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien. On dit que

- $\Gamma$  est un réseau si l'aire hyperbolique de l'espace quotient  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  est finie.
- En particulier, on dit que  $\Gamma$  est un réseau cocompact si  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  est compact

On montrera par la suite que le deuxième point est bien un cas particulier du premier car  $\Gamma$  admet alors un domaine fondamental compact.

**Définition 3.5.3.** On dit qu'un groupe fuchsien est géométriquement fini s'il admet un domaine de Dirichlet avec un nombre fini de côtés.

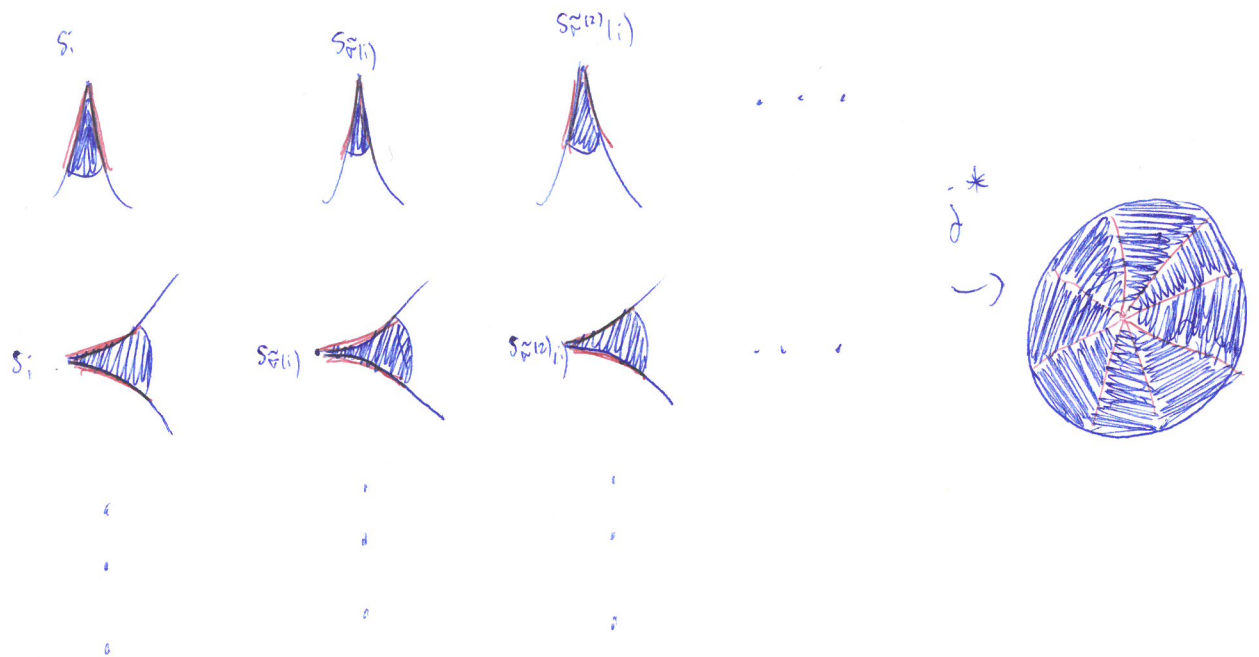
**Théorème 3.5.4** (de Siegel). Un réseau est géométriquement fini.

**Preuve:** On montre que n'importe quel domaine de Dirichlet  $D_p$  est fini. Les sommets d'un domaine de Dirichlet sont isolés car il est localement fini donc tout compact  $K$  de  $\mathbb{H}^2$  contient un nombre fini de sommets d'un domaine de Dirichlet. Cela traite déjà le cas où  $D_p$  est compact. Dans le cas général, l'argument est basé sur le lemme suivant.

**Lemme 3.5.5.**

$$\sum_w (\pi - w) \leq \mu(D_p) + 2\pi$$

où la somme est prise sur tous les sommets de  $D_p$  dans  $\mathbb{H}^2$ .


 Figure 3.13: Troisième type d'ouverts de  $H^*$ 

**Preuve:** On note  $\partial D$  la partie du bord de  $D$  dans  $\mathbb{H}^2$ . On remarque que  $\partial D$  n'est pas forcément connexe (si  $D$  a des points à l'infini par exemple). On joint  $p$  à chaque sommet  $a_k$  par une géodésique  $A_k$ .

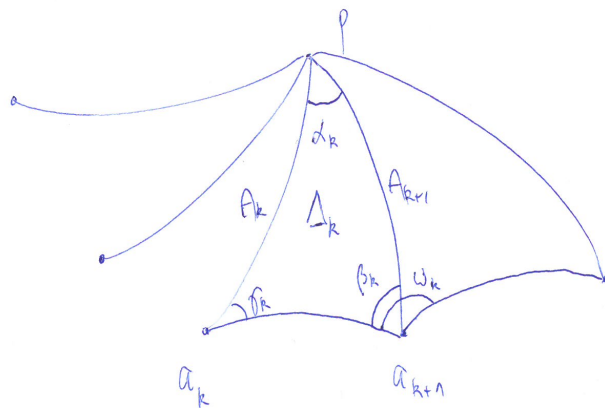


Figure 3.14: Les notations

On obtient une famille de triangles  $\Delta_k$ , d'angles  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  et  $\gamma_k$ . On note aussi  $\omega_k$  l'angle entre  $A_k$  et  $A_{k+1}$ , i.e  $\omega_k = \beta_k + \gamma_{k+1}$ . Lorsque  $\partial D$  se disconnecte, on fait les ajustements de notation évidents (par exemple on note le dernier sommet d'une composante connexe  $a_k$  et le premier de la suivante  $a'_k$  avec  $\gamma_k = \gamma'_k$  et on identifie  $a_k$  et  $a'_k$ ).

Pour l'instant on sait que le nombre de sommets est au plus dénombrable. Ainsi, notons  $\dots, a_m, \dots, a_n, \dots$  la suite des sommets (le cas où la suite est borné dans une direction est similaire et plus simple). D'après le théorème de Gauss-Bonnet ([ref](#)), on a

$$\mu(\Delta_k) = \pi - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k.$$



D'où,

$$\sum_{k=m}^n \alpha_k + \sum_{k=m}^n \mu(\Delta_k) = \pi - \gamma_m - \beta_n + \sum_{k=m}^{n-1} (\pi - \omega_k) \quad (\star)$$

Le membre de gauche est borné par une constante indépendante de  $n$  et  $m$  car  $\sum_{k=m}^n \alpha_k \leq 2\pi$  et  $\sum_{k=m}^n \mu(\Delta_k) \leq \mu(D) < +\infty$ . Puisque les suites  $\gamma_m$  et  $\beta_n$  sont aussi bornées, on en déduit que  $\sum_{k=m}^{n-1} (\pi - \omega_k)$  converge (en tant que suite double), puis donc que  $\gamma_m$  et  $\beta_n$  convergent (fixer l'une des deux variables puis faire tendre l'autre vers l'infini). Notons  $\gamma_{-\infty} = \lim_{m \rightarrow -\infty} \gamma_m$  et  $\beta_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ . On veut maintenant montrer que  $\pi - \gamma_{-\infty} - \beta_{\infty} \geq 0$ . Seul un nombre fini de  $a_k$  est à distance inférieure à  $R$  de  $p$  (car  $D$  est localement fini). On en déduit que  $a_k \rightarrow \infty$  et donc que  $d(p, a_{k+1}) > d(p, a_k)$  pour une infinité de valeurs de  $k$ . Pour ces indices  $k$ , on a  $\gamma_k > \beta_k$  (loi du sinus). Et, puisque  $\beta_k + \gamma_k \leq \pi$ , on a  $\beta_{\infty} \leq \frac{\pi}{2}$  et de même,  $\gamma_k \leq \frac{\pi}{2}$ . On passe enfin à la limite dans l'égalité  $(\star)$  et on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\Delta_k) \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi - \omega_k)$$

et le membre de gauche est bien inférieur à  $2\pi + \mu(D)$ . □

Soit maintenant  $a$  un sommet et  $a^1 = a, a^2, \dots, a^n$  la suite des sommets congruents (il n'y en a qu'un nombre fini car l'orbite de  $\Gamma$  est discrète; en effet sinon la suite des angles aux sommets du cycle tend vers 0 car la somme est bornée et on trouve une suite qui s'accumule en tournant autour de  $a$ ). On note  $\omega^i$  l'angle en  $a^i$ . Ainsi, on a

- $\omega^1 + \dots + \omega^n = 2\pi$  si  $a$  n'est pas fixé par un elliptique ou
- $\omega^1 + \dots + \omega^n = \frac{2\pi}{m}$  si  $a$  est fixé par un elliptique d'ordre  $m$ .

Dans le premier cas, puisque  $\omega^i < \pi$ , on a  $n \geq 3$  puis

$$\sum_{k=1}^n (\pi - \omega_k) = (n-2)\pi.$$

Cela borne le nombre de cycles elliptiques du premier cas. Dans le second cas,

$$\sum_{k=1}^n (\pi - \omega_k) = (n - \frac{2}{m})\pi.$$

Si  $m \geq 3$ , on obtient  $\sum_{k=1}^n (\pi - \omega_k) < \frac{\pi}{3}$  donc il ne peut y avoir qu'un nombre fini de cycles dont l'ordre des elliptiques associés est supérieur ou égal à 3. Enfin, chaque point fixe d'elliptique d'ordre 2 est sur un segment de  $D$  et est donc entre deux sommets qui ne sont pas fixés par des elliptiques d'ordre 2. On conclut que les cycles constitués de points fixes d'elliptiques d'ordre 2 est aussi fini (d'ailleurs il n'y a qu'un seul sommet par cycle).

Puisque chaque sommet de  $D$  dans  $\mathbb{H}^2$  appartient à un cycle, la conclusion de tout ceci est qu'il n'existe qu'un nombre fini de sommets à distance finie de  $p$ . Nous allons terminer la preuve en montrant que le nombre de sommets à l'infini est fini lui-aussi. Soit donc  $b_1, \dots, b_N$  des sommets à l'infini. Il existe un polygone hyperbolique  $D'$  bordé par un nombre fini de géodésiques et contenu dans  $D$  dont les sommets à l'infini sont exactement  $b_1, \dots, b_N$ .

En raisonnant comme dans le lemme, on montre que

$$\sum_{k=1}^n (\pi - \omega_k) = 2\pi + \mu(D')$$

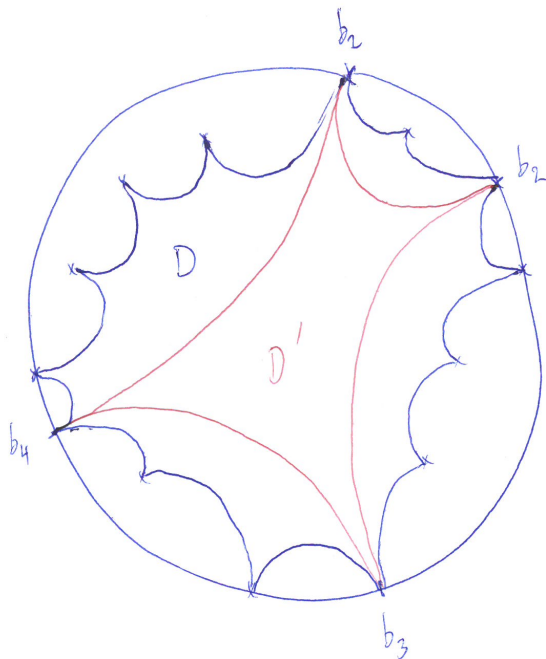


Figure 3.15: Un sous-domaine avec des points au bord

Mais pour ces sommets, on a  $\omega = 0$ . D'où

$$N\pi = 2\pi + \mu(D') \leq 2\pi + \mu(D).$$

On conclut que  $N$  est fini □

### 3.5.2 Groupes fuchsien cocompacts

L'objectif de cette section est de montrer que les groupes fuchsien cocompacts sont exactement ceux qui ont un (en fait tous) domaine de Dirichlet compact.

**Proposition 3.5.6.** *Si un groupe fuchsien a un domaine de Dirichlet compact, alors il n'a pas d'élément parabolique.*

**Preuve:** Soit donc  $D$  un domaine de Dirichlet compact. On pose

$$\eta(z) = \inf \{d(z, \gamma z) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{e\} \text{ et } \gamma \text{ n'est pas elliptique}\}$$

Les deux idées à exploiter sont que, d'une part un élément parabolique a des points qui sont arbitrairement peu déplacés et que d'autre part, puisque les translatés de  $D$  pavent le plan hyperbolique, la situation des points de  $D$  est la situation générale.

La fonction  $\eta$  est continue puisque l'orbite est discrète donc fermée. Pour chaque  $z$ ,  $\eta(z) > 0$ . Puisque  $D$  est compacte,  $\eta = \inf \{\eta(z), z \in D\}$  est atteint et  $\eta > 0$ . Puis, si  $z$  est un point quelconque de  $\mathbb{H}^2$ , soit  $\gamma$  tel que  $\gamma(z) = w \in D$ . Soit  $\gamma_0$  non elliptique et différent de id. Alors

$$d(z, \gamma_0 z) = d(\gamma z, \gamma \gamma_0 z) = d(w, \gamma \gamma_0 \gamma^{-1} w) \geq \eta$$

car  $\gamma \gamma_0 \gamma^{-1}$  n'est pas elliptique. Donc

$$\inf \{d(z, \gamma z) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{e\} \text{ et } \gamma \text{ n'est pas elliptique}\} = \eta > 0.$$

Par ailleurs, si  $\Gamma$  contient un parabolique, sa distance de déplacement est 0, donc il existe des points  $z$  qui sont bougés d'une distance inférieure à  $\eta$ . □

**Proposition 3.5.7.** 1. Si  $\Gamma$  admet une région de Dirichlet non compacte, alors la variété quotient  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  n'est pas compacte.

2. Si une région de Dirichlet est d'aire finie mais non compacte, elle a un sommet à l'infini.

**Preuve:** Soit  $D_p$  une région de Dirichlet. On montre dans un premier temps que si  $D_p$  est non compacte, alors elle contient un rayon géodésique infini partant de  $p$ . En effet, pour chaque direction en  $p$ , il existe une unique demi géodésique partant de  $p$  avec la vitesse initiale donnée par cette direction.

Cette demi géodésique est soit contenue dans  $D$ , soit touche le bord  $\partial D_p$  en un unique point ( $D_p$  est convexe). On note  $l(v)$  la longueur du morceau de géodésique contenue dans  $D_p$  et partant de  $p$  à vitesse  $v$ . L'espace des directions est compact (c'est  $\mathbb{S}^1$ ) et  $l$  est une fonction continue car le bord de  $D_p$  est continu. Ainsi si  $l(v) < \infty$  pour tout  $v$ , alors  $l$  est bornée et  $D_p$  est compact. Donc, si  $D_p$  est non compact, il existe une demi géodésique de longueur infinie dans  $D_p$ . Cette géodésique reste non bornée dans le quotient  $D_p/\Gamma$  puisque seuls les points du bord sont identifiés. ceci prouve déjà le point 1.

Pour 2., on considère une direction  $v_0$  qui engendre une demi géodésique infinie contenue dans  $D_p$ . L'extrémité de cette géodésique est contenue dans  $\partial\mathbb{H}^2 \cap \partial D_p$ . Mais, puisque  $D_p$  est d'aire hyperbolique finie,  $\partial\mathbb{H}^2 \cap \partial D_p$  est une réunion de sommets.

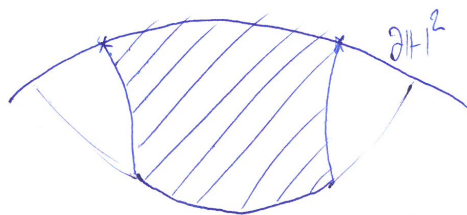


Figure 3.16: Une zone du plan hyperbolique d'aire infinie

□

**Corollaire 3.5.8.** La variété (ou orbifold) quotient d'un groupe fuchsien est compacte si et seulement si toute région de Dirichlet est compacte.

À ce stade de notre réflexion, on peut déjà constater qu'il y a une relation entre les réseaux cocompacts et l'absence d'éléments paraboliques. On veut maintenant montrer une réciproque et analyser l'action des paraboliques.

**Théorème 3.5.9.** Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien qui admet une région de Dirichlet  $D_p(\Gamma)$  d'aire finie. Alors,

1. Chaque sommet à l'infini de  $D_p$  est le point fixe d'un parabolique de  $\Gamma$ .
2. Si  $\xi$  est un point de  $\partial\mathbb{H}^2$  fixé par un parabolique de  $\Gamma$ , alors il existe  $\alpha \in \Gamma$  tel que  $\alpha(\xi) \in \partial D_p \cap \partial\mathbb{H}^2$ .

**Preuve:** Le point 2. est trivial (une région de Dirichlet pave). Soit  $b$  un sommet de  $D_p$  à l'infini. On considère les images de  $D_p$ ,  $\alpha(D_p)$  qui ont aussi  $b$  pour sommet à l'infini. il y en a une infinité car l'angle en  $b$  est nul. On remarque d'ailleurs que ceci est cohérent avec la convention des appariements de faces qui dit qu'un sommet à l'infini à un elliptique associé qui est d'ordre infini, donc un parabolique (autrement dit, une rotation non triviale d'angle 0 a son point fixe à l'infini).

Soit  $b^1 = b, b^2, \dots, b^n$  les sommets congruents à  $b$  (il n'y en a qu'un nombre fini car  $\Gamma$  est géométriquement fini). On pose  $b^k = \gamma_k(b)$ , pour  $k = 1, \dots, n$ . Chaque image de  $D_p$  qui a  $b$  pour sommet est de la forme  $\gamma\gamma_k^{-1}(D_p)$  où  $\gamma$  fixe  $b$ . Il y a donc une infinité de tels  $\gamma$ . Montrons qu'ils sont tous paraboliques. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un  $\gamma$  comme auparavant soit hyperbolique.

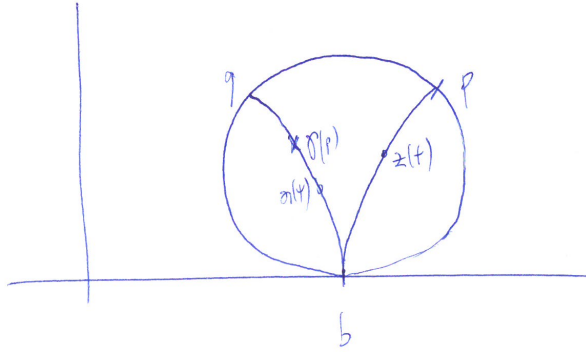


Figure 3.17: La construction

On considère une géodésique  $z(t)$  qui connecte  $p$  à  $b$  avec  $z(0) = p$  et  $z(\infty) = b$ . Puisque  $D_p$  est une région de Dirichlet (connexe), toute la géodésique  $z$  est à l'intérieur de  $D_p$  et  $d(p, z(t)) < d(\gamma(p), z(t))$  pour tout  $t$ . On considère ensuite un horocycle en  $b$  passant par  $p$ ; on le note  $\omega(b)$ . Puisque  $\gamma$  n'est pas parabolique,  $\gamma(p)$  n'est pas sur l'horocycle  $\omega(b)$  (exo **ref**). Ainsi  $\gamma(p)$  est soit à l'intérieur de  $\omega(b)$  soit à l'extérieur de  $\omega(b)$  selon si  $b$  est attracteur ou répulsif. On suppose que  $\gamma(p)$  est à l'intérieur de  $\omega(b)$ , quitte à changer  $\gamma$  en  $\gamma^{-1}$  (l'inverse d'un parabolique est aussi parabolique). Soit maintenant  $x$  la géodésique qui relie  $\gamma(p)$  à  $b$ . On note  $q$  le point d'intersection de  $\omega(b)$  avec  $x$ . On change ensuite l'origine du temps pour  $x$  de sorte que  $x(0) = q$ . Puis on montre que  $d(z(t), x(t))$  tend vers 0. En effet, en conjuguant, la situation devient

et on utilise les formules pour la distance :

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(x(t), z(t))\right) = \frac{|a - c|}{2t} \rightarrow 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} t &= d(p, z(t)) \\ &= d(q, x(t)) \\ &= d(q, \gamma(p)) + d(\gamma(p), x(t)) \end{aligned}$$

si  $t$  est grand. Enfin, en utilisant l'inégalité triangulaire pour  $d(\gamma(p), z(t))$  en transitant par  $x(t)$ , on obtient,

$$d(p, z(t)) \geq d(q, \gamma(p)) + d(\gamma(p), z(t)) - d(z(t), x(t)).$$

En faisant tendre  $t$  vers  $\infty$ , on obtient

$$d(p, z(t)) > d(\gamma(p), z(t)),$$

ce qui est une contradiction. □

**Corollaire 3.5.10.** *Un groupe fuchsien est cocompact si et seulement si c'est un réseau qui ne contient pas de paraboliques.*

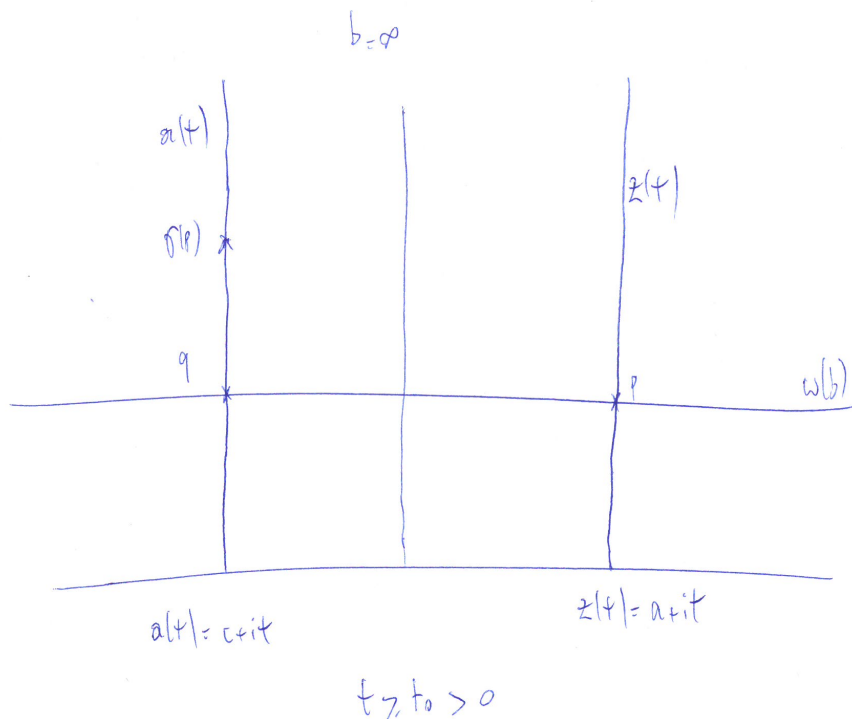


Figure 3.18: Après conjugaison

### 3.5.3 Signature d'un groupe fuchsien

Soit  $\Gamma$  un réseau. Le quotient  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  est une orbifold donc une surface topologique de genre  $g$ . on note  $n_1, \dots, n_r$  les ordres des elliptiques associés aux cycles. Si un sommet est à l'infini, on considère qu'il est seul dans son cycle avec  $m = \infty$ .

**Définition 3.5.11.** On dit alors que le groupe fuchsien a une signature  $(g; n_1, \dots, n_r)$ .

**Théorème 3.5.12** (Gauss-Bonnet). Soit  $\Gamma$  un groupe de signature  $(g; n_1, \dots, n_r)$ . Alors le volume de la variété quotient est donné par

$$\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = (2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

**Preuve:** On en donne qu'une ébauche de preuve (qui peut être complétée avec un peu de topologie des surfaces). On note  $n$  le nombre de paires d'arêtes identifiées dans  $D_p$  et  $r$  le nombre de cycles elliptiques.

La surface quotient a  $r$  point marqués et  $n$  arêtes marquées. On découpe la surface le long de ces  $n$  arêtes. On obtient une face (simplement connexe) qui est le domaine de Dirichlet. Ainsi la caractéristique d'Euler de la surface est

$$r - n + 1 = -(2g - 2)$$

d'après le cours de topologie des surfaces. On découpe le polygone fondamental en triangles (dont on peut calculer l'aire en fonction des angles qui eux-mêmes sont liés aux ordres des elliptiques)<sup>1</sup>. Ce découpage permet de calculer l'aire de la surface. On trouve

$$\mu(D_p) = (2n - 2)\pi - 2\pi \left( \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} \right) = 2\pi \left( 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right).$$

<sup>1</sup>La preuve du théorème de Gauss-Bonnet riemannien se conduit aussi en respectant ces deux étapes : une locale où on calcule l'aire des (petits) triangles puis une globale où on somme les informations locales obtenues

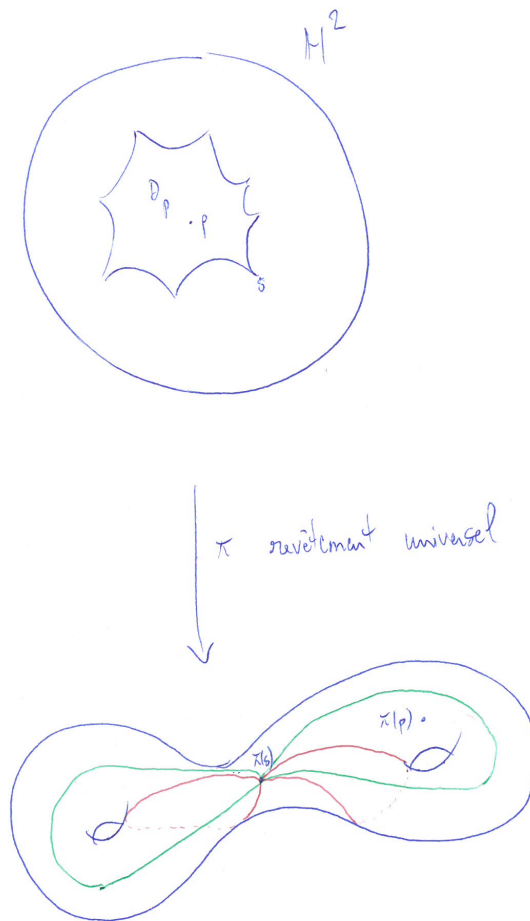


Figure 3.19: Calcul de la caractéristique d'Euler

□

La réciproque de ce théorème est donnée par une variante du théorème de Poincaré, dont la preuve s'adapte facilement

**Théorème 3.5.13.** Soit  $g \geq 0$ ,  $r \geq 0$  et  $m_i \geq 1$  tous entiers ( $m_i$  pouvant être infini) tels que

$$(2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0.$$

Alors il existe un groupe fuchsien cocompact de signature  $(g; n_1, \dots, n_r)$ .

**Remarque** En analysant cette formule, Siegel a montré que le réseau de plus petit volume est le groupe de triangle  $(2, 3, 7)$  (voir [exo](#)), en particulier le réseau de plus petit volume est cocompact. Ce résultat est faux pour les réseaux de  $SL_n(\mathbb{R})$  d'après un résultat de Thilmany du 30/06/2017<sup>2</sup>

### 3.6 Exercices corrigés pour le chapitre 3

**Exercice 3.1** Soit  $V$  une  $(G, X)$ -variété. Montrer que  $\tilde{V}$  est aussi une  $(G, X)$ -variété.

<sup>2</sup>la veille de notre dernier cours :-)

**Exercice 3.2 (Le tore est euclidien)**

Montrer que le tore  $\mathbb{T}^n$  est muni d'une  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -structure (appelée d'ailleurs structure de translation).

**Exercice 3.3 (Structure affine sur un quotient de quadrilatère)**

On note  $\mathcal{A}$  le groupe des similitudes directes du plan euclidien. On considère un quadrilatère convexe plein non dégénéré  $\mathcal{P} = ABCD$ . Vérifier qu'il existe une unique similitude directe  $\gamma_1$  qui envoie le segment orienté  $AB$  sur  $DC$  et une unique similitude directe  $\gamma_2$  qui envoie  $AD$  sur  $BC$ . On note  $\sim$  la relation d'équivalence engendrée par

$$x \sim \gamma_i x \quad \text{si } x \text{ et } \gamma_i x \in \mathcal{P}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

Vérifier que  $\mathcal{P}/\sim$  est muni d'une  $(\mathcal{A}, \mathbb{R}^2)$ -structure. On note  $\Gamma$  le groupe engendré par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . À quelle condition sur  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  le groupe agit-il librement et discontinûment ?

**Exercice 3.4**

**Facultatif, utilise des notions de géométrie riemannienne.**

On suppose que  $X$  est munie d'une métrique riemannienne et que  $G$  agit par isométries sur  $X$ . On suppose aussi que  $X$  est simplement connexe. Soit  $V$  une  $(G, X)$ -structure compacte. Le but de cet exercice est de montrer que  $V$  est complète.

1. Montrer que  $V$  et  $\tilde{V}$  sont munis de métriques riemanniennes de sorte que  $D : \tilde{V} \rightarrow X$  est une isométrie locale.
2. Montrer qu'il existe  $\varepsilon$  tel que, pour tout  $y \in \tilde{V}$ , la restriction de  $D$  à  $B(y, \varepsilon)$  est une isométrie.
3. En déduire que  $D$  est un revêtement puis que  $D$  est un homéomorphisme.

**Exercice 3.5** Quels sont les sous-groupes discrets de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^1$  ?

**Exercice 3.6** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe cyclique (fini ou non) de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Gamma$  soit fuchsien.

**Exercice 3.7** Montrer qu'un groupe kleinien est dénombrable.

**Exercice 3.8** Si  $\Gamma$  est un groupe kleinien, montrer que les points fixes des elliptiques de  $\Gamma$  ne peuvent pas s'accumuler.

**Exercice 3.9**

1. **Lemme du ping-pong.** Soit  $\Gamma$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$  et soit  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux sous-groupes de  $\Gamma$  (les joueurs de ping-pong) tels que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  engendrent  $\Gamma$ . On suppose qu'il existe deux parties  $X_1$  et  $X_2$  non vides de  $X$  (la table de ping-pong) avec  $X_2$  non incluse dans  $X_1$  et avec

$$\gamma(X_2) \subset X_1 \quad \forall \gamma \in \Gamma_1 \setminus \{1\}$$

$$\gamma(X_1) \subset X_2 \quad \forall \gamma \in \Gamma_2 \setminus \{1\}$$

On suppose aussi que  $\Gamma_1$  contient au moins 3 éléments. Montrer que  $\Gamma = \Gamma_1 \star \Gamma_2$ .

2. **Groupes de Shottky** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux hyperboliques de  $\mathbb{H}^2$  tels qu'il existe des régions disjointes  $A_+, A_-, B_+$  et  $B_-$  de  $\mathbb{H}^2$  avec  $\alpha(\mathbb{H}^2 \setminus \overline{A_-}) \subset A_+$  et  $\beta(\mathbb{H}^2 \setminus \overline{B_-}) \subset B_+$ . Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  engendrent un groupe libre de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  et que ce groupe est discret.

**Exercice 3.10** Dans certains livres de géométrie hyperbolique, on propose souvent une définition différente, plus générale, de groupes kleinien qui est plus adaptée à l'étude de la dynamique du groupe sur le bord à l'infini de l'espace hyperbolique. Cette série a pour but d'introduire cette définition et de montrer son utilité. On se place en dimension 3 et soit  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . On note  $\Omega' = \Omega'(\Gamma)$  l'ensemble des points  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  tels que l'action de  $\Gamma$  en  $z$  est libre et discontinue (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $z$  tel que  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\} = \{e\}$ ). On note encore  $\Omega = \Omega(\Gamma)$  l'ensemble des points  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  tels que l'action de  $\Gamma$  en  $z$  est discontinue (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $z$  tel que  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$  est fini). En dynamique, on dit que  $\Omega'$  est l'ensemble des *points errants* pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Définition :** On dit qu'un groupe  $\Gamma$  est kleinien si  $\Omega'(\Gamma) \neq \emptyset$ .

### 1. Préliminaire sur les cercles isométriques.

Soit  $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $\gamma(\infty) \neq \infty$ . Alors

- (a) Il existe un unique cercle  $C$  tel que  $\gamma(C)$  et  $C$  sont isométriques (pour la métrique euclidienne de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $C$  est le cercle isométrique de  $\gamma$  (voir aussi la série 1).
- (b) Soit  $r$  l'inversion de cercle  $C$ . Alors il existe une isométrie euclidienne  $u$  tel que  $\gamma = ur$ .

*Indication :* Soit  $C$  le cercle isométrique de  $\gamma$  (de centre  $\alpha$ ),  $C'$  celui de  $\gamma^{-1}$  (de centre  $\alpha'$ ). Si on pose  $\sigma$  la symétrie d'axe la médiatrice de  $[\alpha, \alpha']$  et  $v$  la rotation autour de  $\alpha$ , on vérifiera que  $\gamma = \sigma v r$ .

### 2. Généralités.

- (a) Montrer que  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont des ouverts  $\Gamma$ -invariants.
- (b) Montrer que si  $\Gamma$  est kleinien alors  $\Gamma$  est dénombrable.  
*Indication :* Il suffit de trouver une famille sommable indexée par  $\Gamma$ .
- (c) Montrer que  $\Omega'(\Gamma)/\Gamma$  est séparé.
- (d) Montrer qu'un groupe kleinien est discret.
- (e) Pour montrer que la réciproque est fausse, on pourra considérer le groupe  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$  et faire l'observation suivante : si  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$  est fixé par un parabolique ou un hyperbolique, alors  $\alpha \notin \Omega$ .

### 3. Ensembles limites.

**Définition :** Soit  $\Gamma$  un groupe kleinien. Un point  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$  est un point limite de  $\Gamma$  si  $\alpha$  est un point d'accumulation d'une orbite  $\Gamma \cdot z$  où  $z \in \Omega'(\Gamma)$  (i.e il existe un point  $z \in \Omega'(\Gamma)$  et une suite injective  $(\gamma_n)_n \subset \Gamma$  telle que  $\gamma_n(z) \rightarrow \alpha$ ). On note  $\Lambda(\Gamma)$  l'ensemble des points limite de  $\Gamma$ .

- (a) On veut montrer dans un premier temps un résultat de convergence plus fort qu'une convergence ponctuelle. Prenons  $\alpha' \in \Lambda$  et  $(\gamma_n)$  et  $z$  comme dans la définition. On veut montrer qu'il existe un point  $\alpha$  tel que la convergence de  $\gamma_n(z)$  vers  $\alpha'$  est en fait uniforme sur les compacts de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha\}$ .
  - i. Montrer qu'on peut supposer  $z = \infty$ .
  - ii. Montrer qu'il existe  $R > 0$  tel que  $\gamma(\{|z| > R\}) \cap \{|z| > R\} = \emptyset$ . Posons  $C_R = \{|z| = R\}$ .
  - iii. Montrer que le rayon  $\rho_n$  de  $\gamma_n(C_R)$  tend vers 0.



- iv. Soit  $R_n$  le rayon du cercle isométrique de  $\gamma_n$ . En ayant auparavant montré que  $R\rho_n = R_n^2$ , montrer que  $R_n$  tend vers 0.
- v. Quitte à extraire on peut poser  $\alpha = \lim \gamma_n^{-1}(\infty)$ . Conclure.
- (b) Soit maintenant  $(\gamma_n)$  une suite injective. Montrer qu'il existe une sous-suite  $(\gamma_{n_k})$  et  $\alpha, \alpha' \in \Lambda(\Gamma)$  tel que  $\gamma_{n_k}$  converge vers  $\alpha'$  uniformément sur les compacts de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha\}$ .
- (c) Soit  $\Gamma$  un groupe kleinien. À l'aide de ce résultat de convergence, montrer les points suivants
  - i. Le bord de l'espace s'écrit comme réunion disjointe  $\hat{\mathbb{C}} = \Lambda(\Gamma) \cup \Omega(\Gamma)$ .
  - ii.  $\Lambda(\Gamma)$  est un fermé  $\Gamma$ -invariant et nulle part dense (i.e  $\overset{\circ}{\Lambda(\Gamma)} = \emptyset$ ).
  - iii.  $\Omega \setminus \Omega'$  est discret dans  $\Omega$ .
  - iv.  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont denses dans  $\hat{\mathbb{C}}$ .
  - v. Si  $\Lambda$  a plus de trois éléments, alors  $\Lambda$  n'a pas de points isolés. En particulier, il est non dénombrable. Par exemple, c'est un Cantor ou un quasi-cercle.

En dimension 2, pour un groupe discret en général, on peut montrer avec des arguments similaires l'alternative suivante

- Soit l'ensemble limite a un ou deux éléments,
- Soit c'est un Cantor,
- Soit c'est la sphère toute entière.

### Exercice 3.11 (Groupes de triangles)

1. Soit  $k_1, k_2$  et  $k_3$  trois entiers tels que  $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1$ . Montrer qu'il existe un triangle hyperbolique d'angles  $\frac{\pi}{k_1}, \frac{\pi}{k_2}$  et  $\frac{\pi}{k_3}$ . Notons le  $ABC$ .
2. Montrer que le groupe engendré par les réflexions (les inversions) d'axes  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(BC)$  forme un groupe discret. Donner une présentation du sous-groupe d'indice 2 engendré par les isométries directes. En donner un domaine fondamental. Quel est son aire ?
3. (Facultatif) En utilisant le théorème de Selberg (voir wikipédia), montrer que tout groupe triangulaire admet un sous-groupe de surface compacte d'indice fini. Pour  $k_1, k_2$  et  $k_3$  explicites, déterminer un tel sous-groupe.

### Exercice 3.12 (Classification des sous-groupes élémentaires)

Soit  $G$  un groupe élémentaire de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  et soit  $\{x_1, \dots, x_n\}$  une orbite finie de  $G$ . Montrer le théorème de classification suivant

1. Si  $n \geq 3$  ou si  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{H}^3$ , alors tous les éléments de  $G$  sont elliptiques et  $G$  est conjugué à un sous-groupe de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ .
2. Si  $n = 1$  et  $\{x_1\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ , alors  $G$  est conjugué à un sous-groupe du groupe affine.
3. Si  $n = 2$  et  $\{x_1, x_2\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ , alors  $G$  est conjugué à un sous-groupe du groupe des transformations  $z \mapsto az, z \mapsto \frac{a}{z}, a \in \mathbb{C}^*$ .

**Exercice 3.13 (Une propriété des sous-groupes non élémentaires)**

On veut montrer le résultat suivant : si  $\Gamma$  est un groupe non élémentaire de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ , alors il existe une famille infinie d'éléments hyperboliques  $(\gamma_i)$  telle que si  $i \neq j$ , alors  $F_{\gamma_i} \cap F_{\gamma_j} = \emptyset$ .

1. Montrer que  $\Gamma$  contient un hyperbolique.
2. Soit donc  $\gamma$  un élément hyperbolique avec  $F_\gamma = \{\alpha, \beta\}$ . Puisque  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, il existe  $\gamma'$  qui ne fixe pas  $\alpha$  et  $\beta$ . On distingue alors deux cas.
  - (a) Si  $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma'(\alpha), \gamma'(\beta)\} = \emptyset$ , on pose  $\gamma_1 = \gamma'\gamma\gamma'^{-1}$ . Montrer que la suite  $\gamma_n = \gamma^n\gamma_1\gamma^{-n}$  convient.
  - (b) Si  $\gamma_1$  et  $\gamma$ , ont un point fixe en commun  $\alpha$ , alors  $\pi = [\gamma_1, \gamma]$  est parabolique et il existe  $\gamma''$  tel que  $\gamma''(\alpha) \neq \alpha$ . Posons  $\pi' = \gamma''\pi\gamma''^{-1}$ . Montrer alors que soit  $\gamma_n = \pi'^n\gamma\pi'^{-n}$  soit  $\gamma_n = \pi'^n\gamma_1\pi'^{-n}$  convient.

**Exercice 3.14 (Une application de théorème de Poincaré)**

Trouver une présentation de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Exercice 3.15 (Encore un théorème de classification des isométries)**

1. Rappeler encore une fois la définition de cercle isométrique  $C(\gamma)$  d'une isométrie  $\gamma$  de  $\mathbb{H}^2$ .
2. Soit  $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que
  - (a)  $\gamma$  est hyperbolique si et seulement si  $C(\gamma)$  et  $C(\gamma^{-1})$  ne s'intersectent pas.
  - (b)  $\gamma$  est elliptique si et seulement si  $C(\gamma)$  et  $C(\gamma^{-1})$  s'intersectent.
  - (c)  $\gamma$  est parabolique si et seulement si  $C(\gamma)$  et  $C(\gamma^{-1})$  sont tangents.

**Exercice 3.16 (Les paraboliques stabilisent les horocycles)**

Soit  $\gamma$  un élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  qui fixe un point  $s \in \mathbb{S}^1$ . Montrer que  $\gamma$  est parabolique si et seulement si, pour chaque horocycle passant par  $s$ ,  $\omega(s)$ , on a  $\gamma(\omega(s)) = \omega(s)$ .

**Exercice 3.17 (Variétés à cusps)**

Soit  $\Gamma$  un réseau non cocompact et  $D$  un domaine de Dirichlet pour  $\Gamma$ . Montrer qu'il existe y a une correspondance bijective entre les classes de congruences de points à l'infini de  $D$  et les classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux de  $\Gamma$ . Ce nombre s'appelle le nombre de cusps (ou cuspides) de la variété  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ . Demander à l'assistant de faire des dessins.

**Corrigés des exercices (ou référence)**

**Exercice 3.1**

**Exercice 3.2**

**Exercice 3.3**

**Exercice 3.4**

**Exercice 3.5**

**Exercice 3.6**

**Exercice 3.7**

**Exercice 3.8**

**Exercice 3.9**

**Exercice 3.10**

**Exercice 3.11**

**Exercice 3.12**

**Exercice 3.13**

**Exercice 3.14**

**Exercice 3.15**

**Exercice 3.16**

**Exercice 3.17**