Corrigé 2025

Exercice 1 ....

1) a) La fonction f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, a fortiori, dérivable sur $[0,1]$.

De plus, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n} k\times k\,x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$ et $f_n'(x)$ est strictement positive comme somme de termes tous positifs (car $k\geq 1>0$ et $x\geq 0$) dont le premier est égal à 1.
Par conséquent, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) f_n est polynomiale donc continue sur $[0,1]$ et elle est strictement croissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$.

On a $f_n(0)=0<1$ et $f_n(1)=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ donc, comme $n\geq 1$, on a $f_n(1)=\frac{n(n+1)}{2}\geq 1$, et ainsi, 1 appartient à $[f_n(0), f_n(1)]$, ce qui montre, par bijectivité de f_n, que l'équation $f_n(x)=1$ possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0,1]$.

c) Avec $n=1$, l'équation $f_n(x)=1$ devient $f_1(x)=1$, c'est-à-dire $x=1$ dont la solution plus qu'évidente est $u_1=1$.

2) a) On a $f_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{n+1} k\,x^k=\sum_{k=1}^{n} k\,x^k+(n+1)x^{n+1}$.
On trouve ainsi :

$$\boxed{f_{n+1}(x)=f_n(x)+(n+1)x^{n+1}}$$

b) On en déduit : $f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+(n+1)u_n^{n+1}=1+(n+1)u_n^{n+1}$.
Comme $u_n\geq 0$, on a $1+(n+1)u_n^{n+1}\geq 1$ et on obtient :

$$\boxed{f_{n+1}(u_n)\geq 1}$$

c) Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on sait que u_{n+1} est la solution de l'équation $f_{n+1}(x)=1$, on a donc $f_{n+1}(u_{n+1})=1$ et la relation $f_{n+1}(u_n)\geq 1$ s'écrit maintenant : $f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})$.
Par stricte croissance de f_{n+1}, on peut conclure que $u_n \geq u_{n+1}$, et ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3) a) Comme $x\neq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

b) En posant $g_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$, alors, par linéarité de la dérivation, on a $g_n{}'(x)=\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ (le terme d'indice 0 de la première somme étant égal à 1, sa dérivée est nulle). De plus, comme $g_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x\neq 1$, les règles de dérivation donnent :

$$g_n{}'(x)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

En ordonnant suivant les puissances décroissantes :

$$\boxed{\forall x\neq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}=\frac{n\,x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$$

c) Pour tout $x\in[0,1]$, on a $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} k\,x^k = x\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ mais, avec $x\in[0,1[$, la condition $x\neq 1$ est réalisée et on obtient, grâce à la question précédente :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ f_n(x)=\frac{n\,x^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}}$$

4) a) Par définition, on a $f_2(x)=\sum_{k=1}^{2} k\,x^k = x+2x^2$ et on sait que u_2 est une solution de l'équation $f_2(x)=1$, donc solution de $x+2x^2=1$, soit en ordonnant : $2x^2+x-1=0$. Le discriminant est $\Delta=9$ et on en déduit que les deux solutions de cette équation sont -1 et $\dfrac{1}{2}$.

Comme $u_2\geq 0$, on est certain que $u_2=\dfrac{1}{2}$.

Comme la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et comme $u_2=\dfrac{1}{2}$, alors, pour tout entier naturel $n\geq 2$, on a $u_n\leq u_2$, soit $u_n\leq\dfrac{1}{2}$.

On sait depuis la question 1c) que $u_n\geq 0$ donc on obtient :

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ 0\leq u_n\leq\frac{1}{2}}$$

b) De l'encadrement précédent et par croissance de la fonction $x\mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, on en déduit : $0\leq u_n^n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\dfrac{1}{2}\in\left]-1,1\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$, et on obtient, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n^n=0}$$

Du même encadrement, on tire aussi : $0\leq n\,u_n^n\leq n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\dfrac{1}{2}\in\left]-1,1\right[$, on a, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$, et finalement, on trouve, encore une fois par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}n\,u_n^n=0}$$

c) Par définition de u_n, on a $f_n\left(u_n\right)=1$ et comme, pour tout entier $n\geq 2$, on a $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{2}$, on est sûr que $u_n\neq 1$ et on peut appliquer la question 3c) avec $x=u_n$, ce qui donne :

$$\forall n\geq 2\,,\ \frac{n\,u_n{}^{n+2}-(n+1)u_n{}^{n+1}+u_n}{(1-u_n)^2}=1$$

On a donc $(1-u_n)^2=n\,u_n{}^{n+2}-(n+1)u_n{}^{n+1}+u_n$, d'où :

$$(1-u_n)^2-u_n=n\,u_n{}^{n+2}-(n+1)u_n{}^{n+1}$$

En développant le membre de gauche, on trouve bien :

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ u_n^2-3u_n+1=n\,u_n^{n+2}-\left(n+1\right)u_n^{n+1}}$$

d) Dans l'objectif de passer à la limite en utilisant les deux résultats de la question 4b), on peut réécrire ceci sous la forme :

$$u_n^2-3u_n+1=u_n^2\times n\,u_n^n-u_n\left(n+1\right)u_n^n$$

Avec encore un petit effort, on obtient :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = u_n^2 \times n u_n^n - u_n \left(n u_n^n + u_n^n \right)$$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc, après passage à la limite, il reste : $\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est égal à 5 donc cette équation admet deux solutions qui sont $\ell_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- D'une part, on sait que $0 \le u_n \le \dfrac{1}{2}$ donc $0 \le \ell \le \dfrac{1}{2}$.
- D'autre part, comme $4 \le 5 \le 9$, on a $2 \le \sqrt{5} \le 3$, ce qui donne $\dfrac{5}{2} \le \ell_1 \le 3$ et

$0 \le \ell_2 \le \dfrac{1}{2}$.

Comme $\ell_1 > \dfrac{1}{2}$, la seule option est donc :

$$\boxed{\ell = \ell_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Exercice 2 ....

1) a) Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a les équivalences suivantes :

$M \in E \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = M(a,b)$.

$$M \in E \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les deux matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) La famille (B,C) est donc génératrice de E et elle est libre car constituée de deux matrices non proportionnelles donc c'est une base de E et ainsi la dimension de E est égale à 2.

2) Les matrices de E sont symétriques donc diagonalisables.

En revanche, elles ont deux colonnes égales (la première et la troisième) donc elles ne sont pas inversibles.

3) On a $A = B + 3C$ donc $A = M(1,3)$, ce qui prouve que A appartient à E.

4) On peut proposer :

```
def matA():
    return np.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])
```

5) a) Comme A appartient à E, la question 2) garantit que A n'est pas inversible, ce qui implique que 0 est valeur propre de A.

b) On a $A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et la somme des trois colonnes est nulle, ce qui prouve que le rang de $A - 5I$ est strictement inférieur à 3, donc que $A - 5I$ n'est pas inversible.

De même, $A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et on peut voir que la somme de la première colonne et de la troisième est égale au double de la deuxième, ce qui prouve que le rang de $A + 4I$ est strictement inférieur à 3, et ainsi $A + 4I$ n'est pas inversible.
Les deux autres valeurs propres de A sont donc -4 et 5.

c) Recherche des sous-espaces propres de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Pour la valeur propre 0, on résout le système $AX = 0$ et on a :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 3y \\ 3x - y + 3(-x - 3y) = 0 \end{cases}$$

Finalement, on obtient :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 3y \\ -10y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Vect}(U)$ et comme la famille (U) est constituée d'un seul vecteur non nul, c'est une base de ce sous-espace propre.

- Pour la valeur propre 5, on résout le système $AX = 5X$ et on a :

$$AX = 5X \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+z=5x \\ 3x-y+3z=5y \\ x+3y+z=5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ 3x-6y+3z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases}$$

On trouve (pivot de Gauss) :

$$AX = 5X \overset{\substack{L_2 \leftarrow 4L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3+L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ -5y+5z=0 \\ 15y-15z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ y=z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+4z=0 \\ y=z \end{cases}.$$

Finalement, $AX = 5X \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si on pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 5 est $\mathrm{Vect}(V)$ et comme la famille (V) est constituée d'un seul vecteur non nul, c'est une base de ce sous-espace propre.

- Pour la valeur propre -4, on résout le système $AX = -4X$ et on a :

$$AX = -4X \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+z=-4x \\ 3x-y+3z=-4y \\ x+3y+z=-4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$$

On trouve (pivot de Gauss) :

$$AX = -4X \overset{\substack{L_2 \leftarrow 5L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow 5L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ 2y+4z=0 \\ 12y+24z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ y=-2z \\ y=-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-5z=0 \\ y=-2z \end{cases}.$$

Finalement, $AX = -4X \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si on pose $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -4 est $\mathrm{Vect}(W)$ et comme la famille (W) est constituée d'un seul vecteur non nul, c'est une base de ce sous-espace propre.

- Pour conclure, la famille (U,V,W) est la concaténation des bases des sous-espaces propres de A et ces sous-espaces propres sont associés à des valeurs propres distinctes donc (U,V,W) est une famille libre. De plus, elle contient trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et, par construction, elle est bien formée de vecteurs propres de A.

6) D'après le script proposé, r_1 est le rang de $A-5I$.
Le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(A-5I)+\dim\mathrm{Ker}(A-5I)=\dim\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})=3$ et comme $\mathrm{Ker}(A-5I)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 5, on a, grâce à la question 5c), $\dim\mathrm{Ker}(A-5I)=1$ d'où $r_1=2$.
Toujours d'après le script proposé, r_2 est le rang de $A+4I$, et le même raisonnement donne $\dim\mathrm{Ker}(A+4I)=1$, ce qui donne $r_2=2$.

7) a) Il suffit de tester U, V et W sur $M(a,b)$.
On a alors :

- $M(a,b)U=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0\times U$ donc U est vecteur propre

de $M(a,b)$ associé à la valeur propre 0.

- $M(a,b)V=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix}=(2a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(2a+b)V$ donc

V est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $2a+b$.

- $M(a,b)W=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-2b \\ 4b-4a \\ 2a-2b \end{pmatrix}=(2a-2b)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=(2a-2b)W$

donc W est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $2a-2b$.

Conclusion : U, V et W sont vecteurs propres de toutes les matrices de E.

b) La matrice P dont les colonnes sont les vecteurs U, V et W est inversible puisque (U,V,W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la relation de changement de base donne $M(a,b)=PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de $M(a,b)$ associées respectivement à U, V et W sur sa diagonale.

Une récurrence permet d'établir que $M(a,b)^n=PD^nP^{-1}$ et il reste à calculer P^{-1} pour obtenir par simple produit matriciel la matrice $M(a,b)^n$.

c) On peut proposer la fonction suivante :

```
def puissanceM(a,b,n):
   D=np.array([[0,0,0],[0,2*a+b,0],[0,0,2*a-2*b]])
   P=np.array([[1,1,1],[0,1,-2],[-1,1,1]])
   M=np.dot(P,np.dot(D**n,al.inv(P)))
   return M
```

Exercice 3 ....

1) • La fonction f_n est nulle donc positive sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$, et elle est positive sur $[0,n]$ car avec $x \leq n$, on a $1-\dfrac{x}{n} \geq 0$.

• Sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$, f_n est nulle donc continue, et sur l'intervalle $[0,n]$, f_n est continue car polynomiale. Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en n.

• Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{n}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sont nulles car f_n est nulle sur $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$. L'intégrale $\int_{0}^{n} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et on a :

$$\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \left[-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n = -0+1 = 1$$

On a finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0+1+0 = 1$.

Bilan : on peut conclure que f_n est une densité.

2) a) La fonction qui à t associe $\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)$ est nulle sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$ et elle est continue sur $[0,n]$ comme fonction polynomiale.

Par conséquent, les intégrales $\int_{-\infty}^{0}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ $\int_{n}^{+\infty}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sont nulles et l'intégrale $\int_{0}^{n}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment) donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument car les fonctions intégrées positives), ce qui prouve que $E\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)$ existe.

D'après le théorème de transfert, on a alors :

$$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \left[-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n$$

On trouve enfin :

$$\boxed{E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=\frac{n}{n+1}}$$

Avec la fonction qui à t associe $\left(1-\frac{t}{n}\right)^2 f_n(t)$, on prouve de même que $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe et le théorème de transfert assure de plus :

$$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t\ \int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\mathrm{d}t=\left[-\frac{n}{n+2}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+2}\right]_0^n$$

Cette fois, on obtient :

$$\boxed{E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)=\frac{n}{n+2}}$$

b) On a $n\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=n-X_n$ donc $X_n=n-n\left(1-\frac{X_n}{n}\right)$ et ainsi, comme $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)$ possède une espérance, alors X_n aussi.

Par linéarité de l'espérance, on trouve :

$$E(X_n)=n-n\,E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=n-n\times\frac{n}{n+1}=\frac{n(n+1)-n^2}{n+1}$$

On a finalement :

$$\boxed{E(X_n)=\frac{n}{n+1}}$$

On a aussi $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2=1-\frac{2}{n}X_n+\frac{1}{n^2}X_n{}^2$ donc $\frac{1}{n^2}X_n{}^2=\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2-1+\frac{2}{n}X_n$ et on trouve $X_n{}^2=n^2\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2-n^2+2nX_n$.

Comme $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2$ et X_n possèdent une espérance alors $X_n{}^2$ aussi et en remplaçant ce qui est connu, on obtient, par linéarité de l'espérance :

$$E\left(X_n{}^2\right)=n^2\times\frac{n}{n+2}-n^2+2n\,E(X_n)=\frac{n^3}{n+2}-n^2+\frac{2n^2}{n+1}=n^2\left(\frac{n}{n+2}-1+\frac{2}{n+1}\right).$$

On a donc $E\left(X_n{}^2\right)=n^2\left(\frac{-2}{n+2}+\frac{2}{n+1}\right)=\frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}$.

Le théorème de Koenig-Huygens permet de terminer le travail :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{2n^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = n^2 \times \frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{V(X_n) = \frac{n^3}{(n+1)^2(n+2)}}$$

3) Par définition, on a $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

- Pour $x < 0$, on obtient : $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Pour $x \in [0, n]$, on obtient :

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \left[-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^x = -\left(1-\frac{x}{n}\right)^n + 1 = 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

- Pour $x > n$, on obtient : $F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{n} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1$.

En résumé :

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \le x \le n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}}$$

4) a) Pour tout réel x strictement négatif, on a $F_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

b) En fait, avec la deuxième ligne de l'accolade ci-dessus, dès que $n \ge x$, on a $F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. Comme $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$, ceci est valable dès que $n \ge \lfloor x \rfloor + 1$ (condition suffisante).

c) Si $x = 0$, alors $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = n \ln(1) = 0$ d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = 0$.

Si $x > 0$, alors, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{x}{n} = 0$, on a l'équivalent $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$ et on obtient $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -x$ d'où : $\forall x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x$.

Ceci restant valable pour $x = 0$, on conclut :

$$\boxed{\forall x \ge 0,\ \lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x}$$

d) Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \geq x$, la question 4b) permet d'écrire $F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$ donc, d'après la limite obtenue à la question 4c) et grâce à la continuité de la fonction exponentielle en $-x$, on obtient :

$$\forall x \geq 0, \ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

En résumé, on a avec la question 4a) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

On peut conclure que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

5) a) D'après le cours traitant de la loi uniforme sur $[0,1]$, on a :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

b) Pour tout réel *x*, on a :

$$P(Z_n > x) = P(n\ M_n > x) \overset{\overset{n>0}{\downarrow}}{=} P(M_n > x/n)$$

Dire que la variable M_n (qui prend la plus petite des valeurs prises par $U_1, ..., U_n$) prend une valeur strictement supérieure à x/n, c'est dire que chacune des variables $U_1, U_2, ..., U_n$ a pris une valeur strictement supérieure à x/n (sinon, l'une des variables $U_1, ..., U_n$ aurait pris une valeur inférieure ou égale à x/n, et mécaniquement M_n aussi, donc M_n ne serait pas strictement supérieure à x/n).
On a donc :

$$(Z_n > x) = \bigcap_{k=1}^{n} (U_k > x/n)$$

Comme $U_1, U_2, ..., U_n$ sont mutuellement indépendantes, on obtient :

$$P(Z_n > x) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k > x/n)$$

Les variables U_k suivent la même loi, de fonction de répartition G, donc :

$$P(Z_n > x) = \prod_{k=1}^{n} (1 - G(x/n)) = (1 - G(x/n))^n$$

D'après la question 5a), on sait que $G(x/n)=\begin{cases}0 & \text{si } x/n<0\\ x/n & \text{si } 0\le x/n\le 1\\ 1 & \text{si } x/n>1\end{cases}$ et on en déduit : $G(x/n)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x/n & \text{si } 0\le x\le n\\ 1 & \text{si } x>n\end{cases}$.

En remplaçant dans $P(Z_n>x)$, on obtient :

$$\boxed{P(Z_n>x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<0\\ \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0\le x\le n\\ 0 & \text{si } x>n\end{cases}}$$

Comme la fonction de répartition de Z_n est la fonction F_{Z_n} définie par $F_{Z_n}(x)=P(Z_n\le x)=1-P(Z_n>x)$, on obtient :

$$\boxed{F_{Z_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0\le x\le n\\ 1 & \text{si } x>n\end{cases}}$$

c) On voit, grâce aux résultats des questions 3) et 5b) que les fonctions de répartition de Z_n et X_n sont égales donc Z_n suit la même loi que X_n.

d) D'après la question 5c), simuler X_n revient à simuler Z_n donc, comme $Z_n=n\,\min(U_1,...,U_n)$, on peut proposer :

```
def simulX(n):
  U=rd.random(n) # simulation de U1,...,Un
  return n*np.min(U)
```

Problème ....

1) Pour la simulation de X_n, on peut proposer le code suivant où la variable informatique `X` contiendra à la fin la valeur prise par X_n, et dont la boucle `while` traduit le fait que tant qu'on pioche une boule noire on recommence et le nombre de tirages augmente d'une unité.

On peut donc proposer :

```
def varX(n):
    k=rd.randint(1,n+2)# choix de l'urne
    if k==n+1:
        X=0 # l'urne n+1 n'a aucune boule blanche
    elif k==1:
        X=1 # l'urne 1 n'a que des boules blanches
    else:
        X=1 # maintenant, on peut initialiser X à 1
        while rd.randint(1,n+1)<=k-1:
            X=X+1
    return(X)
```

2) On choisit une urne au hasard (ce qui garantit l'équiprobabilité) et il y a $n+1$ urnes donc :

$$\boxed{P(U_k)=\frac{1}{n+1}}$$

3) a) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k, est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-k+1}{n}$: en effet, comme on sait qu'on pioche dans l'urne numérotée k, on a affaire au rang de la première boule blanche lors de tirages avec remise (donc indépendants) pour lesquels la probabilité de piocher une boule blanche est égale à $\dfrac{n-k+1}{n}$.

b) Sachant quelle urne a été choisie, on connaît la loi conditionnelle de X_n donc on peut proposer :

```
else:
    X=rd.geometric((n-k+1)/n)
return(X)
```

4) a) L'urne numérotée $n+1$ ne contient aucune boule blanche donc on n'aura, à coup sûr, aucune boule blanche au premier tirage.
Par conséquent :

$$\boxed{P_{U_{n+1}}(X_n=1)=0}$$

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on sait que la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k, est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-k+1}{n}$.

On a donc :

$$\boxed{P_{U_k}\left(X_n=1\right)=\frac{n-k+1}{n}}$$

c) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(U_k\right)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$, tous de probabilité non nulle, s'écrit :

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n+1}P(U_k)P_{U_k}(X_n=1)$$

Le terme d'indice $n+1$ est nul donc on peut l'enlever sans changer la valeur de la somme, d'où :

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n}P(U_k)P_{U_k}(X_n=1)$$

Maintenant, on remplace tout ce que l'on connaît, ce qui donne :

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\times\frac{n-k+1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$$

On pose $i=n-k+1$, ce qui inverse les bornes de la somme mais elles restent les mêmes : quand $k=1$, on a $i=n$ et quand $k=n$, on a $i=1$.

On obtient alors : $P(X_n=1)=\dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i=\dfrac{1}{n(n+1)}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il reste à simplifier et on trouve :

$$\boxed{P(X_n=1)=\frac{1}{2}}$$

5) a) Même argument qu'à la question 4a) : l'urne numérotée $n+1$ ne contient aucune boule blanche donc on n'obtiendra jamais de boule blanche et en particulier, on n'aura aucune boule blanche au $j^{\text{ième}}$ tirage.

On a donc :

$$\boxed{P_{U_{n+1}}\left(X_n=j\right)=0}$$

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, comme à la question 4b), on sait que la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k, est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-k+1}{n}$ donc :

$$\boxed{P_{U_k}\left(X_n=j\right)=\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\times\frac{n-k+1}{n}}$$

c) Toujours avec la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(U_k\right)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$, on a, toujours en enlevant le terme d'indice $n+1$ qui est nul :

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n+1} P(U_k) P_{U_k}(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) P_{U_k}(X_n = j)$$

On remplace : $\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \times \frac{n-k+1}{n}$.

On écrit $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Il n'y a plus qu'à développer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \times \left[\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j}\right]$$

Le changement d'indice $h = k-1$ donne : $P(X_n = j) = \frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^{n-1} \left[\left(\frac{h}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{h}{n}\right)^{j}\right]$.

L'indice d'une somme est muet donc on a bien :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ P(X_n = j) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]}$$

6) a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $-1 < 0 \leq \frac{k}{n} < 1$ donc la série $\sum_j \left(\frac{k}{n}\right)^j$ est convergente et on peut scinder la somme $\sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$ en deux sommes (puisque les séries créées sont convergentes).
On obtient alors :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \underset{\downarrow}{\overset{i=j-1}{=}} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} - \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j} = \frac{k}{n}$$

(seul le terme d'indice $i = 1$ de la première somme subsiste, les autres se simplifient).

b) Comme X_n prend des valeurs entières, on a $P(X_n \geq 2) = \sum_{j=2}^{+\infty} P(X_n = j)$ sans problème de convergence de la série (sa somme est une probabilité).
On a donc :

$$P(X_n \geq 2) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

Pour chaque k de $[\![0,n-1]\!]$, on a vu que la série géométrique de raison $\frac{k}{n}$ est convergente donc on peut permuter les sommes, ce qui donne :

$$P(X_n \geq 2) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

Grâce à la question 6a), on obtient :

$$P(X_n \geq 2) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}k$$

Pour $n=1$, on trouve $P(X_1 \geq 2)=0$ (la somme contient un seul terme égal à 0), et pour $n \geq 2$, on peut écrire, en enlevant le premier terme de la somme qui est nul :

$$P(X_n \geq 2) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n-1)}{2}$$

Cette égalité reste valable pour $n=1$ puisque elle donne $P(X_1 \geq 2)=0$, donc on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n \geq 2) = \frac{n-1}{2(n+1)}}$$

7) a) La famille $([X_n=0],[X_n=1],[X_n \geq 2])$ est un système complet d'événements donc on a :

$$P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n \geq 2)=1$$

On en déduit :

$$P(X_n=0)=1-P(X_n=1)-P(X_n \geq 2) = 1-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2(n+1)}$$

On obtient $P(X_n=0)=\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{n+1}{2(n+1)}-\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{2}{2(n+1)}$ et enfin :

$$\boxed{P(X_n=0)=\frac{1}{n+1}}$$

b) En fait, ne jamais obtenir de boule blanche, c'est avoir choisi l'urne numérotée $n+1$ (car dans les autres urnes, par propriété de la loi géométrique, on tombera sur une boule blanche « un jour ou l'autre »). On a donc :

$$P(X_n=0)=P(U_{n+1})=\frac{1}{n+1}$$

8) a) Pour tout $j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a $j\,P(X_n = j) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1} - j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j} \right]$ et en mettant $j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1}$ en facteur dans la somme, on trouve :

$$j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Sommons pour j allant de 2 à N (avec $N \geq 2$) :

$$\sum_{j=2}^{N} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Les sommes sont finies donc on peut les permuter :

$$\sum_{j=2}^{N} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$$

Comme à la question 6a), pour chaque k de $[\![0, n-1]\!]$, on a $-1 < \dfrac{k}{n} < 1$ donc la série géométrique dérivée première de terme général $j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1}$ est absolument convergente, ce qui prouve que $\sum_{j=2}^{N} j\,P(X_n = j)$ possède une limite finie quand N tend vers $+\infty$.

Par conséquent, la série de terme général $j\,P(X_n = j)$ est convergente (absolument convergente car à termes positifs) donc X_n possède une espérance.

De plus, après passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$$

Il reste à compléter pour obtenir $E(X_n)$:

$$E(X_n) = 0\times P(X_n = 0) + 1\times P(X = 1) + \sum_{j=2}^{+\infty} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{+\infty} j\,P(X_n = j)$$

On obtient donc :

$$E(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$$

D'après le cours, on a $\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1} = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^2}$ donc $\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1} = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^2} - 1$ et ainsi : $\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1} = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)} - \left(1-\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{n}{n-k} - \dfrac{n-k}{n}$.

On en déduit : $E(X_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n}{n-k}-\frac{n-k}{n}\right)$.

En posant $p=n-k$, on trouve successivement :

$$E(X_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{n}{p}-\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{n}{p}-\frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n}.$$

$$E(X_n)=\frac{1}{2}+\frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}p=\frac{1}{2}+\frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}.$$

Conclusion :

$$\boxed{E(X_n)=\frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}$$

b) On peut proposer :

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
v=np.arange(1,n+1)
E=np.sum(1/v)*n/(n+1)
print(E)
```

9) a) $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[p,p+1],\ \frac{1}{p+1}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{p}$ (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$).

On intègre ces fonctions continues entre p et $p+1$ (bornes dans l'ordre croissant) et on trouve :

$$\boxed{\frac{1}{p+1}\le\int_p^{p+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{p}}$$

b) Sommons l'encadrement précédent pour p allant de 1 à $n-1$ (avec $n\geq 2$) :

$$\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1}\le\sum_{p=1}^{n-1}\int_p^{p+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$$

La relation de Chasles pour les intégrales et le changement d'indice $i=p+1$ dans la première somme permet d'écrire :

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\le\int_1^n\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$$

En revenant à l'indice p et après calcul de l'intégrale restante, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\le\ln(n)\le\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}}$$

c) On utilise l'encadrement précédent en séparant les deux inégalités.

L'inégalité de gauche fournit $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-1\leq\ln(n)$, soit :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\leq\ln(n)+1 \qquad (1)$$

L'inégalité de droite fournit $\ln(n)\leq\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$, soit :

$$\ln(n)+\frac{1}{n}\leq\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \qquad (2)$$

En regroupant (1) et (2), on obtient :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^{*}\setminus\{1\},\ \ln(n)+\frac{1}{n}\leq\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\leq\ln(n)+1}$$

d) En divisant l'encadrement précédent par $\ln(n)>0$ (car $n\geq 2$), on trouve :

$$\forall n\geq 2,\ 1+\frac{1}{n\ln(n)}\leq\frac{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}{\ln(n)}\leq 1+\frac{1}{\ln(n)}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n\ln(n)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)=1$, donc par encadrement, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}{\ln(n)}=1$$

Ceci montre que $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$.

Pour finir, on sait que $E(X_n)=\frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$, et comme $\frac{n}{n+1}\underset{+\infty}{\sim}1$, on a :

$$\boxed{E(X_n)\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)}$$