EXERCICE 1

1. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $0_3 M + M 0_3 = 0_3$. $\boxed{\text{Donc } E_{0_3} = \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$
   Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
   $$M \in E_{I_3} \iff I_3 M + M I_3 = 0_3 \iff 2M = 0_3 \iff M = 0_3$$
   $\boxed{\text{Donc } E_{I_3} = \{0_3\}}$
2. Soit $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   - E_C est une partie de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.
   - $0_3 \in E_C$ car $C 0_3 + 0_3 C = 0_3$, ainsi E_C n'est pas vide.
   - Pour tous M et N de E_C , et tout λ réel,
   $$C(M + \lambda N) + (M + \lambda N)C = \underbrace{CM + MC}_{=0_3} + \lambda \underbrace{(CN + NC)}_{=0_3} = 0_3$$
   donc $M + \lambda N \in E_C$. Alors E_C est stable par combinaison linéaire

   $\boxed{\text{Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, } E_C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\,.}$
3. $M \in E_A$ donc $AM + MA = 0_3$, ainsi ${}^t(AM + MA) = 0_3$, c'est-à-dire ${}^tM\,{}^tA + {}^tA\,{}^tM = 0_3$.
   Or A est symétrique, ${}^tMA + A\,{}^tM = 0_3$, $\boxed{\text{ainsi } {}^tM \text{ appartient à } E_A\,.}$
4. (a) A est symétrique donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

   (b) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} = 9A$, donc $x^3 - 9x$ est un polynôme annulateur de A .
   Ainsi, si λ est valeur propre de A , $\boxed{\text{alors } \lambda^3 - 9\lambda = 0\,.}$

   (c) Les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda = 0$ sont -3 , 0 et 3 .

   $\lambda = -3$, $A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Remarquons que $(A + 3I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$. Et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$.

   Donc -3 est bien une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

   $\lambda = 0$, Remarquons que $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. Et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$.

   Donc 0 est bien une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

   $\lambda = 3$, $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Remarquons que $(A - 3I_3)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

   Donc 3 est bien une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

   Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors ils forment une famille libre de cardinal 3 donc une base.

   $\boxed{\text{Finalement, en posant } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{, } D = P^{-1}AP\,.}$
5. Le calcul donne $\boxed{P^2 = 9I_3}$, c'est-à-dire $\frac{1}{9}P.P = P.\frac{1}{9}P = I_3$, $\boxed{\text{ainsi } P^{-1} = \frac{1}{9}P\,.}$

6. (a)

$$DN = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad ND = \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

donc $N \in E_D$ si et seulement si $\begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = 0_3$

c'est-à-dire si et seulement si $a = b = d = f = h = i = 0$, si et seulement si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

> N appartient à E_D si et seulement si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} E_D &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \ : \ (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}(N_1, N_2, N_3)\,, \end{aligned}$$

où $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus la famille (N_1, N_2, N_3) est libre, donc (N_1, N_2, N_3) est une base de E_D. En particulier, E_D est de dimension 3.

7. (a) Comme $N = P^{-1}MP$ donc $M = PNP^{-1}$, et par ailleurs $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$, ainsi :

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff AM + MA = 0_3 \\ &\iff (PDP^{-1})(PNP^{-1}) + (PNP^{-1})(PDP^{-1}) = 0_3 \\ &\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3 \\ &\iff P(DN + ND)P^{-1} = 0_3 \\ &\iff DN + ND = 0_3 \\ &\iff N \in E_D\,. \end{aligned}$$

> Ainsi, $M \in E_A$ si et seulement si $N \in E_D$.

(b) Soit M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff P^{-1}MP \in E_D \\ &\iff \exists (c, e, g) \in \mathbb{R}^3, \quad P^{-1}MP = cN_1 + eN_2 + gN_3 \\ &\iff \exists (c, e, g) \in \mathbb{R}^3, \quad M = cPN_1P^{-1} + ePN_2P^{-1} + gPN_3P^{-1}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $E_A = \text{Vect}(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1})$.
Montrons maintenant que la famille $(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1})$ est libre.
Soient a, b, c trois réels tels que $aPN_1P^{-1} + bPN_2P^{-1} + cPN_3P^{-1} = 0_3$. Alors $P(aN_1 + bN_2 + cN_3)P^{-1} = 0_3$.
donc $aN_1 + bN_2 + cN_3 = 0_3$, d'où $a = b = c = 0$ car la famille (N_1, N_2, N_3) est libre.
Ainsi, la famille $(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1})$ est libre. Puisqu'elle est également génératrice de E_A, c'est une base de E_A.
Or $P^{-1} = \dfrac{1}{9}P$, donc la famille (PN_1P, PN_2P, PN_3P) est également une base de E_A.

8. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
$(A + M)^2 = A^2 + AM + MA + M^2$.
Donc $(A + M)^2 = A^2 + M^2 \iff AM + MA = 0_3 \iff M \in E_A$.

> Ainsi, les matrices M vérifiant $(A + M)^2 = A^2 + M^2$ sont exactement les matrices de E_A, c'est-à-dire les matrices de la forme $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} P$, où $(c, e, g) \in \mathbb{R}^3$.

9. Par définition, $\ker(\varphi) = E_A$, donc $\ker(\varphi)$ est de dimension 3, ainsi d'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) - \dim \ker(\varphi) = 9 - 3 = 6\,.$$

Ainsi $\mathrm{rg}(\varphi) = 6$.

EXERCICE 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et à valeurs positives sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles continues et à valeurs positives.
   - $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n e^{-t}.e^{t/2} = 0$ par croissances comparées, donc $t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\big(e^{-t/2}\big)$.

     Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ est convergente (car $\dfrac{1}{2} > 0$).

   Donc par comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 a pour densité $t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

   donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

   Et une telle variable aléatoire admet un espérance qui vaut 1. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

   Ainsi $I_0 = 1$ et $I_1 = 1$.

2. Soit x un réel positif.
   - La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$ est continue et à valeurs positives sur $[0, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles continues et à valeurs positives dont le dénominateur ne s'annule pas.
   - De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $1 + xt \geqslant 1$ et $e^{-t} \geqslant 0$, donc $\dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant e^{-t}$.

     Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   Donc par comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3. $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = I_0 = 1$. Ainsi $F(0) = 1$

4. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x \leqslant y$ donc $1 + xt \leqslant 1 + yt$.

   Donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{1+yt} \leqslant \dfrac{1}{1+xt}$.

   Or $e^{-t} \geqslant 0$. Donc $\dfrac{e^{-t}}{1+yt} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$.

   Ainsi, par croissance de l'intégrale, $F(y) \leqslant F(x)$.

   Autrement dit, la fonction F est décroissante sur $[0, +\infty[$.

5. (a) **Si** $x = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.

   Si $x > 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}\ln|1+xt|\right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

   Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(b) Soit x un réel strictement positif.

Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ et $1+xt > 0$, donc $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{1}{1+xt}$.

Ainsi par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

(c) Soit x un réel strictement positif.

Pour tout réel $t \geqslant 1$, $1+xt \geqslant x$ et $e^{-t} \geqslant 0$. Donc $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$.

Ainsi, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(d) Soit x un réel strictement positif.

D'après la relation de Chasles, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

Donc d'après les questions précédentes, $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} + \dfrac{K}{x}$ où $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x = +\infty$.

Et $\forall x \geqslant 1$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\,\dfrac{1+x}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{K}{x}\right) = 0$.

Donc d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

6. (a)

$$
\begin{aligned}
F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1+xt} - (1-xt)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\Big(1-(1-xt)(1+xt)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} x^2t^2\,\mathrm{d}t \\
&= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi $F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1-xt)\,\mathrm{d}t = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

(b) Or $F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,\mathrm{d}t = F(x) - I_0 + xI_1$.

Et pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leqslant t^2e^{-t}$ car $\dfrac{1}{1+xt} \leqslant 1$.

Donc par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t = I_2$.

Ainsi, d'après l'identité de la question précédente, $0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2$.

7. (a) D'après la question 1.(b)$I_0 = I_1 = 1$.

D'après l'encadrement de la question précédente, $0 \leqslant F(x) - 1 + x \leqslant x^2 I_2$,

Donc $0 \leqslant \dfrac{F(x)-1+x}{x} \leqslant xI_2$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-1+x}{x} = 0$, autrement dit $F(x) - 1 + x \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

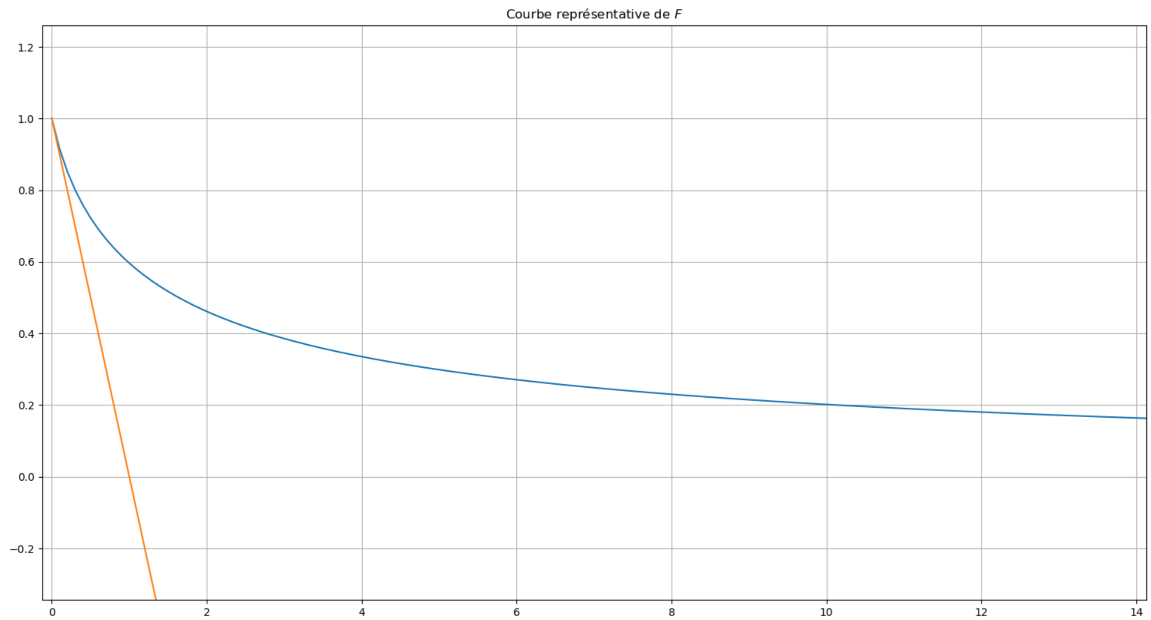
D'où $F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$.

(b) $\forall x > 0,\ \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \dfrac{F(x) - 1}{x}$.

Et d'après la question précédente, $\dfrac{F(x) - 1}{x} \underset{x \to 0}{=} \dfrac{\big(1 - x + o(x)\big) - 1}{x} \underset{x \to 0}{=} -1 + o(1)\,.$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -1\,,$ autrement dit F est dérivable en 0 et $F'(0) = -1\,.$

8. D'après les questions précédentes,
   - $F(0) = 1\,,$
   - F est décroissante sur $[0, +\infty[\,,$
   - F tend vers 0 en $+\infty\,,$
   - la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1 - x\,.$



EXERCICE 3

Partie I.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]\,.$
   - La fonction f_i est continue sur $]-\infty, 1[$ (car constante) et sur $]1, +\infty[$ (comme inverse d'une fonction usuelle continue dont le dénominateur ne s'annule pas). Ainsi, f_i est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}\,.$
   - La fonction f_i est à valeurs positives sur $\mathbb{R}\,.$
   - L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f_i(t)\,\mathrm{d}t$ converge car $f_i = 0$ sur $]-\infty, 1[$.

     L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_i(t)\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{i+1}}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann et $i + 1 > 1\,.$

     Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

     De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{t^{i+1}}\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \Big[-\frac{1}{t^i} \Big]_1^A = 1\,.$

   Ainsi, f_i est bien une densité de probabilité.

2. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} X_i \text{ admet une espérance} \quad & \text{si et seulement si } \int_{-\infty}^{+\infty} t f_i(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument,} \\ & \text{si et seulement si } \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{t^i}\,\mathrm{d}t \text{ converge,} \\ & \text{si et seulement si } i > 1 \text{, d'après le résultat sur les intégrales de Riemann.} \end{aligned}$$

> Ainsi, X_i admet une espérance si et seulement si $i \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{aligned} \text{Dans ce cas, } E(X_i) &= \int_1^{+\infty} \frac{i}{t^i}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A\to+\infty} \Big[-\frac{i}{(i-1)t^{i-1}} \Big]_1^A \\ &= \lim_{A\to+\infty} \Big(\frac{i}{i-1} - \frac{i}{(i-1)A^{i-1}} \Big) \\ &= \frac{i}{i-1}. \end{aligned}$$

> Ainsi $\forall i \in [\![2, n]\!],\ \boldsymbol{E}(X_i) = \dfrac{i}{i-1}$.

(b) Pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, $i^2 \geqslant (i-1)(i+1) = i^2 - 1$ donc $\dfrac{i}{i-1} \geqslant \dfrac{i+1}{i}$. Alors $E(X_i) \geqslant E(X_{i+1})$.

> Ainsi, les numéros de catégorie socioprofessionnelle sont donnés dans l'ordre décroissant de revenu moyen : les individus de la catégorie numéro 2 possède un revenu moyen supérieur à ceux de la catégorie numéro 3, etc.

3. Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et x un réel.

- **Si** $x < 1$, $F_i(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- **Si** $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} f_i(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \int_1^x f_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \frac{i}{t^{i+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{1}{x^i}. \end{aligned}$$

> Ainsi, $F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } \ x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } \ x < 1. \end{cases}$

4. (a) Remarquons d'abord que $0 < U < 1$ presque sûrement, donc $0 < U^{1/i} < 1$ presque sûrement, donc $V_i > 1$ presque sûrement. Ainsi, $V_i(\Omega) =]1, +\infty[$.
Donc $\forall x < 1,\ F_{V_i}(x) = 0$.
Soit $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} F_{V_i}(x) &= P\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leqslant x \right) \\ &= P\left(U^{1/i} \geqslant \frac{1}{x} \right) && \text{par décroissance de la fonction inverse} \\ &= P\left(U \geqslant \frac{1}{x^i} \right) && \text{par croissance de la fonction } x \mapsto x^i \\ &= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^i}, && \text{car } \frac{1}{x^i} \in]0, 1[. \end{aligned}$$

> Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_{V_i}(x) = F_i(x)$, donc V_i et X_i suivent la même loi.

(b) On simule U puis V_i .

```
import numpy.random as rd

def simulX(i):
    u = rd.random()
    return u ** (-1/i)
```

Partie II.

5. On simule une loi binomiale, c'est-à-dire la loi du nombre de succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès. Cependant on initialise le compte à 1 car c'est $Y - 1$ qui suit une loi binomiale.

```
import numpy.random as rd

def simulY(n, p):
    x = 1
    for i in range(n-1):
        if rd.random() < p:
            x += 1
    return x
```

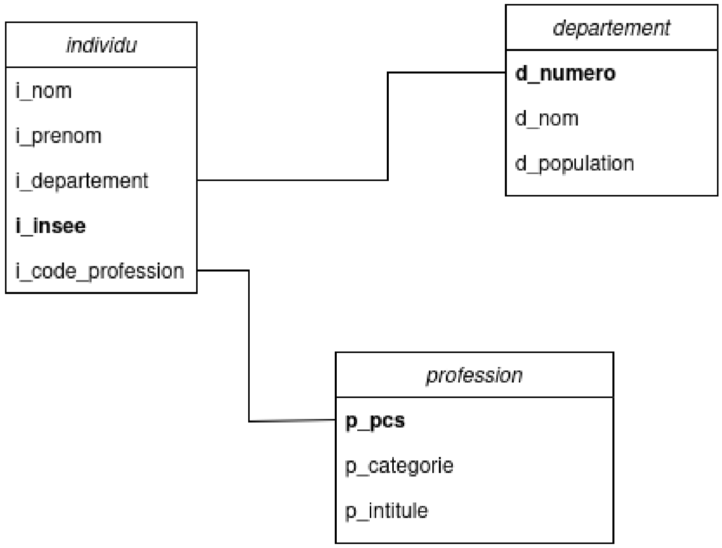
6.
```
def loiY(n, p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in range(N):
        y = simulY(n, p)
        loi[y-1] += 1 / N
    return loi
```

7.
```
def figure(n, p):
    valeurs = np.arange(1, n+1)
    probas = loiY(n, p)
    plt.bar(valeurs, probas)
    plt.show()
```

8. (a) La clé primaire d'une table doit permettre d'identifier de manière unique chaque enregistrement de la table : chaque enregistrement doit posséder une valeur dans cet attribut, et deux enregistrements différents doivent avoir des valeurs différentes dans cet attribut.

   (b) Dans la table `individu`, l'attribut `i_insee` peut servir de clé primaire.
   Dans la table `departement`, l'attribut `d_numero` peut servir de clé primaire.
   Dans la table `profession`, l'attribut `p_pcs` peut servir de clé primaire.

(c) Les traits reliant deux tables indiquent l'attribut permettant de les lier.



Autre possibilité :
Dans le schéma relationnel suivant, les clés primaires sont notées en gras et les clés étrangères sont soulignées :

`individu(i_nom,i_prenom,`<u>`i_departement`</u>`,`**`i_insee`**`, `<u>`i_code_profession`</u>`)`
`departement(`**`d_numero`**`,d_nom,d_population)`
`profession (`**`p_psc`**`, p_categorie,p_intitule)`

- l'attribut `i_departement` de la table `individu` est une clé étrangère qui pointe vers l'attribut `d_numero` de la table `departement`.
- l'attribut `i_code_profession` de la table individu est une clé étrangère qui pointe vers l'attribut `p_pcs` de la table `profession`.

(d)
```
SELECT DISTINCT i_code_profession
FROM individu
WHERE i_departement = 28;
```

(e)
```
SELECT i_insee, p_categorie
FROM individu
INNER JOIN profession ON i_code_profession = p_pcs
```

Partie III.

9. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, La loi conditionnelle de Z_n sachant $[Y = i]$ est la loi de X_i.
Or toutes les variables aléatoires X_i sont à valeurs dans $[1, +\infty[$.
Donc Z_n est à valeurs dans $[1, +\infty[$ et $G_n(x) = 0$ pour tout $x < 1$.

10. (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi conditionnelle de Z_n sachant $[Y = i]$ est la loi de X_i.
Donc $\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_i \leqslant x) = F_i(x)$.

(b) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[Y=i] \ : \ i \in [\![1,n]\!]\}$:

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}(Z_n \leqslant x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leqslant x) P(Y=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \mathbb{P}(Y-1=i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \binom{n-1}{i-1} p^{i-1}(1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

> Ainsi $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$.

(c)

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{x}\right)^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{p}{x} + 1 - p\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{\big(p + (1-p)x\big)^{n-1}}{x^n} . \end{aligned}$$

> Ainsi $G_n(x) = 1 - \dfrac{\big(p+(1-p)x\big)^{n-1}}{x^n}$.

11. D'après les questions précédentes,
- la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ (car constante) et sur $]1, +\infty[$ (comme produit de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas).
  Ainsi, G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- En particulier, G_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
  De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} G_n(x) = 0 = G_n(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} G_n(x)$,
  Donc G_n est continue en 1 .
  Finalement, G_n est continue sur $\mathbb{R}$.

> Par caractérisation des variables aléatoires à densité, Z_n est donc une variable aléatoire à densité.

12.
```
def sondage(n, p):
    i = simulY(n, p)
    return simulX(i)
```

13. (a) Pour tout $x < 1$, $G_n(x) = 0$.
Soit $x \geqslant 1$. D'après la question 10.(c),

$$\begin{aligned} G_n(x) &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} x\right)^{n-1}}{x^n} \\ &= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1+(n-1)x}{nx}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} . \end{aligned}$$

> Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si} \quad x \geqslant 1 , \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 . \end{cases}$

(b) **Soit** $x \leqslant 1$ **.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = 0$.
Donc $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$.

Soit $x > 1$ **.** D'après l'expression de $G_n(x)$ obtenue à la question précédente,

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)\right). \tag{1}$$

Or $\ln(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} h$. Donc comme $-\frac{x-1}{nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$(n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -(n-1)\frac{x-1}{nx}$$

Alors $\lim_{n \to +\infty} (n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) = \frac{1-x}{x}$.

D'où d'après l'identité (1) : $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{(1-x)}{x}}$.

Finalement, pour tout x réel, $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = G(x)$, où $G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{(1-x)}{x}} & \text{si } \quad x > 1 \, , \\ 0 & \text{si } \quad x \leqslant 1 \, . \end{cases}$.

G est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ de dérivée g définie par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{1+x}{x^3} e^{\frac{1}{x}-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

- g est positive sur $\mathbb{R}$.
- g est une fonction continue sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.
- Une primitive de g est G sur $]1, +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1$ et $\lim_{x \to 1} G(x) = 1$.

Donc $\int_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Comme g est nulle sur $]-\infty, 1]$, $\int_{-\infty}^{1} g(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

Donc par définition $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1

Donc g est une densité de probabilité.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. Donc G est bien une fonction de répartition.

> Ainsi la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition G .